[1]Ezt a versenyt minden év őszén az ELTE fizikusai szervezik bárhová járó egyetemisták (sőt, akár középiskolások) számára. A feladatokat a verseny honlapján (`http://ortvay.elte.hu`) olvashatják a résztvevők (magyarul és angolul), és „villám-postán” is beküldhetik a világ bármely részéről. A verseny tíz napig tart, és bármely segédeszköz igénybe vehető.

A feladat. *Egy (hagyományos) lemezjátszó álló korongjára R sugarú tömör gumilabdát (trükklabdát) helyezünk, majd a lemezjátszót bekapcsoljuk. A korong T ideig egyenletes β szöggyorsulással felpörög, majd kikapcsolva T idő alatt leáll. Hogyan mozog a tisztán, csúszás nélkül gördülő trükklabda? (A labda nem esik le a lemezjátszóról.)*

A feladat megoldásához először megpróbáltam a mozgásegyenleteket rendezve olyan egyenletet kapni, amely közvetlenül leírja a labda pályáját. A labda forgása és haladása kapcsolatban van egymással, így arra törekedtem, hogy a forgásra vonatkozó jellemzők kiküszöbölésével csak a haladó mozgásra vonatkozó egyenletet kapjak.

Jelölje $\mathbf{r}$ a lemezjátszó középpontjából a labda alsó pontjába mutató vektort (*1. ábra*), legyen $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$, $\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{r}}$, amely egyben a labda középpontjának sebessége és gyorsulása is. Jelölje továbbá $\mathbf{R}$ a golyó középpontjából az alsó pontjába mutató vektort. Legyen $\overrightarrow{\omega}$ a korong pillanatnyi szögsebessége, $\overrightarrow{\omega}_g$, $\overrightarrow{\beta}_g$ a golyó szögsebessége és szöggyorsulása, és $\mathbf{S}$ a lemezjátszó által a golyóra kifejtett erő, amelynek támadáspontja a golyó legalsó pontja. Tudjuk, hogy a golyó tehetetlenségi nyomatéka $\Theta = \frac{2}{5}mR^2$, ahol m a golyó tömege. Ez azért kezelhető skalárként, mert a golyó gömbszimmetrikus, így a tehetetlenségi nyomaték független a forgástengely irányától.

1. ábra

A golyó mozgására fölírhatunk két egyenletet:

$$\Theta\overrightarrow{\beta}_g = \mathbf{R}\times\mathbf{S}, (1) m\mathbf{a} = \mathbf{S}. (2)$$

Fölírhatjuk továbbá a golyó legalsó pontjára vonatkozó kényszerfeltételt, hiszen ez a korong megfelelő pontjával együtt mozog:

$$\mathbf{v} + \overrightarrow{\omega}_g \times \mathbf{R} = \overrightarrow{\omega} \times \mathbf{r}. \tag{3}$$

Ez utóbbi egyenlet differenciálásával kapjuk azt az egyenletet, ami azt írja le, hogy ennek a két pontnak megegyezik a gyorsulása:

$$\mathbf{a} + \overrightarrow{\beta}_g \times \mathbf{R} = \overrightarrow{\omega} \times \mathbf{v} + \overrightarrow{\beta} \times \mathbf{r}.$$

Rendezzük át ezt az egyenletet:

$$\overrightarrow{\beta}_g \times \mathbf{R} = \overrightarrow{\omega} \times \mathbf{v} + \overrightarrow{\beta} \times \mathbf{r} - \mathbf{a},$$

majd szorozzuk meg mindkét oldalt vektoriálisan $\mathbf{R}$-rel. Mivel $\mathbf{R}$ függőleges, $\overrightarrow{\omega}_g$ és $\overrightarrow{\beta}_g$ vízszintes, így $\mathbf{R} \times \left(\overrightarrow{\beta}_g \times \mathbf{R}\right)$ ugyanolyan irányú, mint $\overrightarrow{\beta}_g$, csak R^2-szer hosszabb. Ezért fennáll, hogy

$$R^2 \cdot \overrightarrow{\beta}_g = \mathbf{R} \times \left(\overrightarrow{\beta}_g \times \mathbf{R}\right) = \mathbf{R} \times (\overrightarrow{\omega} \times \mathbf{v} + \overrightarrow{\beta} \times \mathbf{r} - \mathbf{a}). \tag{4}$$

A (2) egyenlet (1)-be helyettesítésével megszabadulhatunk a labda forgását leíró paraméterektől:

$$\Theta\overrightarrow{\beta}_g = \mathbf{R} \times m\mathbf{a}. \tag{5}$$

A (4) egyenletet Θ-val szorozva, majd (5)-öt felhasználva kapjuk, hogy

$$R^2 \cdot (\mathbf{R} \times m\mathbf{a}) = \mathbf{R} \times \left(\overrightarrow{\omega} \times \mathbf{v} + \overrightarrow{\beta} \times \mathbf{r} - \mathbf{a}\right) \cdot \Theta, \mathbf{R} \times \left(R^2 m\mathbf{a}\right) = \mathbf{R} \times \left(\Theta \cdot \overrightarrow{\omega} \times \mathbf{v} + \Theta \cdot \overrightarrow{\beta} \times \mathbf{r} - \Theta \cdot \mathbf{a}\right).$$

Mivel a zárójelben lévő kifejezések vízszintesek, azaz merőlegesek $\mathbf{R}$-re, ha nem szorozzuk meg őket $\mathbf{R}$-rel, akkor is meg kell egyezniük:

$$R^2 m\mathbf{a} = \Theta \cdot \overrightarrow{\omega} \times \mathbf{v} + \Theta \cdot \overrightarrow{\beta} \times \mathbf{r} - \Theta \cdot \mathbf{a}, \mathbf{a} = \frac{2}{5} \cdot \overrightarrow{\omega} \times \mathbf{v} + \frac{2}{5} \cdot \overrightarrow{\beta} \times \mathbf{r} - \frac{2}{5} \cdot \mathbf{a}, \mathbf{a} = \frac{2}{7} \cdot \overrightarrow{\omega} \times \mathbf{v} + \frac{2}{7} \cdot \overrightarrow{\beta} \times \mathbf{r}. (6)$$

Ez az egyenlet valóban tömören jellemzi a labda mozgását, azonban megvan az a hátránya, hogy másodrendű differenciálegyenlet. Megoldásához magasabb matematikai ismeretekre lenne szükség. Amikor idáig eljutottam, eszembe jutott, hogy az ilyen típusú egyenletek megoldásai néha egészen egyszerű formát öltenek, és ha valamilyen módon meg tudnám sejteni, hogy mi is lehet a megoldás, annak helyességéről behelyettesítéssel könnyen meggyőződhetnék.

Egy valóságos kísérlet elvégzése több akadályba is ütközött: a lemezjátszó felülete nem teljesen sík, gyorsulása sem egyenletes, és a labda gyorsan legurult róla (talán azért, mert nem volt teljesen vízszintes a korong, és így még a lemezjátszó álló helyzetében is jelentős volt a labda gyorsulása).

[1]*

Egy másik módszer is lehetségesnek tűnt: a (6) egyenlet modellezése olyan módon, hogy piciny dt időközönként (a gyorsulást állandónak véve) a sebességet az egyenletünk által megadott gyorsulás dt-szeresével, a helyvektort pedig a sebesség dt-szeresével növeljük. Fölvettem egy koordináta-rendszert a korong síkjában, amelynek origója a korong forgásközéppontja lett, s melynek x tengelyén pozitív irányban állt kezdetben a labda. A vektorszorzatokat tényezőkre bontottam, és így az alábbi skaláris egyenletekkel számoltam:

$$a_x = -\frac{2}{7}(\beta r_y + \omega v_y), (7) a_y = \frac{2}{7}(\beta r_x + \omega v_x). (8)$$

Megfelelően kis dt választásával ez a módszer a valósághoz nagyon közeli eredményt ad, nagyon sok számítás elvégzésével. Ez egy mai átlagos számítógépnek nem jelenthet komoly gondot.

A programomat C nyelven írtam LINUX operációs rendszer alatt. Egy ilyen program megírása bárkinek, aki csak kicsit is járatos a programozásban, körülbelül húsz percet vesz igénybe.

A bemenő adatok: a labda a $(0,1|0)$ pontból indult, azaz 10 cm-re a korong középpontjától (célszerű mindent SI-ben számolni). T-t 100 másodpercnek választottam, $\beta = 0,01\ \mathrm{s}^{-2}$. A dt időkülönbségre egy ezredmásodpercet megadva jogosan remélhettem, hogy elég pontosak lesznek a számolt adatok.

2. ábra

A *2. ábra* a labda mozgását mutatja az első 65 másodperc alatt. Egy-egy pont 2 másodpercenként mutatja a labda helyét. Az ábráról leolvasható, hogy a labda gyorsuló mozgást végezve körpályát fut be. Több kört kirajzoltatva láttam, hogy amikor túl nagynak választottam T-t, megmutatkoztak a módszer hátrányai: fölhalmozódtak a közelítésből adódó hibák, a pálya vastag körgyűrűvé mosódott. Ezen dt csökkentésével tudtam javítani.

3. ábra

Megnéztem a helyet, a sebességet, illetve a gyorsulást is az idő függvényében. A grafikonok alapján gyanítottam, hogy a mozgás egyenletesen gyorsuló körmozgás, illetve a korong lassulása után ugyanilyen ütemben lassuló mozgás, így kirajzoltattam az $\omega_k = v/r$ körfrekvenciát az idő függvényében (*3. ábra*). Látható, hogy a golyó körmozgásának ω_k szögsebessége valóban időben lineárisan változik, és változási üteme β-tól függ. A kezdeti állapotban, $\omega = 0$, $v = 0$ esetén érvényes $\mathbf{a} = \frac{2}{7}\vec{\beta} \times \mathbf{r}$-ből sejthető, hogy a labda körmozgásának szöggyorsulása $\beta_k = \frac{2}{7}\beta$.

A biztonság kedvéért a számítógép által meghatározott $\omega(t)$ adatokra a mérések (és szimulációk) kiértékeléséhez nagyon hasznos GNUPLOT program segítségével egyenest illesztettem. Definiáljuk az `omega(t) = t < 100 ? t * beta : (200 −` függvényt, és keressük meg a számolt adatainkat legjobban közelítő `beta` értéket a `fit` paranccsal! Eredményként $\beta_k = 0,00286$-ot kapunk, ami valóban $\frac{2}{7}\beta$, és a program szerint ez a függvény nagyon jó közelítése az adatoknak.

A számítógépes szimuláció alapján felmerül a gyanú, hátha tetszőlegesen (tehát nem egyenletesen gyorsulva) forgó lemezjátszón is igaz: a labda talppontjának szöggyorsulása mindvégig végig a korongénak $\frac{2}{7}$-szerese lesz. Ez a sejtés valóban igaz. Belátásához azt kell fölismerni, hogy ha a labda éppen körpályán mozog, és szögsebessége a korongénak $\frac{2}{7}$-szerese, akkor a korong bármilyen aktuális szöggyorsulása esetén a labda szöggyorsulása annak $\frac{2}{7}$-szerese. Ezt pedig (6) alapján könnyű belátni, hiszen a sugár- és érintőirányú komponenseket összehasonlítva adódik, hogy

$$r\omega_g^2 = \frac{2}{7}\omega r \omega_g, r\beta_g = \frac{2}{7}\beta r,$$

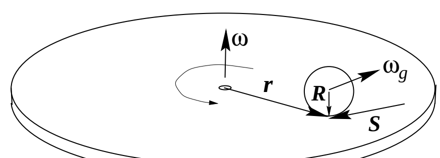
vagyis minden pillanatban fennáll, hogy

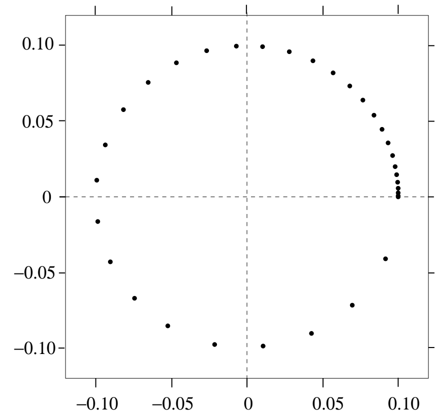
$$\omega_g = \frac{2}{7}\omega \qquad \text{és} \qquad \beta_g = \frac{2}{7}\beta.$$

Most már meg tudjuk válaszolni a feladat kérdését: mivel a kezdeti feltételek megfelelnek a fenti feltételezésnek, ezért a labda szöggyorsulása, szögsebessége és szögelfordulása is arányos a korongéval. Akárhogy történjen is a korong lassulása, egyenletesen vagy másképp, a golyó annak megállta után a középponttól eredeti távolságban meg fog állni.

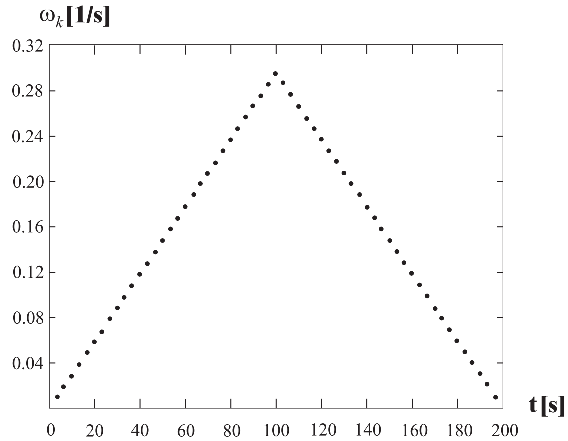
Egy ilyen program birtokában érdemes elgondolkodni azon, mi történik egyéb esetekben. Nos, ha a labda korongra helyezésekor (3) nem teljesül, akkor (megfelelően nagy tapadási súrlódási együttható esetén) rövid időn belül a labda akkora impulzust és perdületet kap a korongtól, hogy mozgása és forgása ezután már a tiszta gördülésnek megfelelő lesz. A $\beta = 0$ (ω állandó) esetben például a labda körpályán fog mozogni, $\omega_g = \frac{2}{7}\omega_k$-val, de pályájának középpontja nem feltétlenül esik egybe a korongéval. Egyéb esetekben, például ha a labda kezdősebességének van sugárirányú komponense, akkor a gyorsuló korongon nem körmozgást végez, hanem egy érdekes pályát ír le, egy (a kezdősebesség irányától függően) nagyobb vagy kisebb körpályát fog közelíteni csillapított rezgőmozgással.

Béky Bence (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn.)





0.10
0.05
0
−0.05
−0.10
−0.10
−0.05
0
0.05
0.10



ω_k [1/s]
0.32
0.28
0.24
0.20
0.16
0.12
0.08
0.04
0
20
40
60
80
100
120
140
160
180
200
t [s]