A $\cos^2\alpha=\dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$ azonosság alapján a bizonyítandó egyenlőség a következő alakot ölti:

$$\frac{1}{2n}\left(n+\cos\frac{4\pi}{2n+1}+\cos\frac{8\pi}{2n+1}+\ldots+\cos\frac{4n\pi}{2n+1}\right)=\frac{2n-1}{4n}.$$

Ennek igazolásához elég belátni, hogy

$$2\cdot\left(\cos\frac{4\pi}{2n+1}+\cos\frac{8\pi}{2n+1}+\ldots+\cos\frac{4n\pi}{2n+1}\right)=-1,$$

vagy más formában:

$$\cos 0^\circ+\left(\cos\frac{4\pi}{2n+1}+\cos\frac{8\pi}{2n+1}+\ldots+\cos\frac{2n\cdot 2\pi}{2n+1}\right)+$$
$$+\left(\cos\frac{4\pi}{2n+1}+\cos\frac{8\pi}{2n+1}+\ldots+\cos\frac{2n\cdot 2\pi}{2n+1}\right)=0.$$

A második zárójeles kifejezés minden tagját a $\cos\alpha=\cos(2\pi-\alpha)$ összefüggés szerint átalakítva:

$$\cos\frac{4\pi}{2n+1}+\cos\frac{8\pi}{2n+1}+\ldots+\cos\frac{2n\cdot 2\pi}{2n+1}=\cos\frac{(2n-1)2\pi}{2n+1}+$$
$$+\cos\frac{(2n-3)2\pi}{2n+1}+\ldots+\cos\frac{2\pi}{2n+1}.$$

Ennek alapján a bizonyítandó összefüggés a következő:

$$\sum_{k=0}^{2n}\cos\frac{k\cdot 2\pi}{2n+1}=0.$$

Ennek igazolásához vegyünk egy egységnyi sugarú körbe írt $2n+1$ oldalú szabályos sokszöget. Helyezzük el az x, y derékszögű koordináta-rendszerben úgy, hogy a sokszög középpontja legyen a koordináta-rendszer kezdőpontja, s az i alapvektor az egyik csúcspontba mutasson.

Megmutatjuk, hogy a szabályos sokszög középpontjából a sokszög csúcsaiba mutató vektorok összege **0**.

Ha ugyanis e vektorok mindegyikét $\dfrac{2\pi}{2n+1}$ szöggel elforgatjuk mondjuk pozitív irányba, az összegvektor is ugyanennyivel fordul el, másrészt az összeadandó vektorok összességükben ugyanazok maradnak, ezért összegük is változatlan kell hogy maradjon. Ez csak úgy lehetséges, ha az összegvektor **0** vektor. $\left(\dfrac{2\pi}{2n+1}\right.$ nem lehet 2π egész számú többszöröse, ha $n\ge 1.\Big)$

$\displaystyle\sum_{k=0}^{2n}\cos\frac{k2\pi}{2n+1}$ nem más, mint az összegvektor x koordinátája, a mondottak alapján értéke tehát 0. Ezzel az (1) egyenlőséget minden $n\ge 1$ egész számra bebizonyítottuk.

Az (1) egyenlőség alapján meghatározhatjuk az $\displaystyle\int_0^\pi\cos^2 x\,dx$ értékét. Osszuk a $[0,\,\pi]$ zárt intervallumot n egyenlő részre. $\xi_i=\dfrac{i\,2\pi}{2n+1}$ az i intervallum eleme, mivel

$$\frac{i-1}{n}\pi<\frac{i\,2\pi}{2n+1}<\frac{i}{n}\pi(i=1,2,\ldots,n).$$

A $[0,\,\pi]$ zárt intervallumban folytonos $\cos^2 x$ függvény 0-tól π-ig vett integrálja létezik, és a ξ_i-re fennálló egyenlőtlenségek folytán

$$\int_0^\pi\cos^2 x\,\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\sum_{i=1}^{n}\cos^2\frac{i\,2\pi}{2n+1}.$$

Az (1) egyenlőséget felhasználva

$$\int_0^\pi\cos^2 x\,\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\pi\frac{2n-1}{4n}=\frac{\pi}{2}.$$

Lenkei Péter (Budapest, József A. Gimn., IV. o. t.)