1. A paralelogrammát két átlója négy egyenlő területű részre osztja. Egy ilyen részháromszög oldalai $\frac{13}{2}$, 10 és $\frac{21}{2}$ egység hosszúak. Ennek a részháromszögnek a területe a Heron-képlettel ($t^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$) kiszámítható. Ha a paralelogramma területe T, akkor

$$\left(\frac{T}{4}\right)^2 = \frac{27}{2} \cdot \frac{14}{2} \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{6}{2}, \qquad \text{ahonnan} \qquad T^2 = (9 \cdot 7 \cdot 2)^2, \qquad T = 126 \text{ területegység.}$$

Ismeretes, hogy bármely paralelogrammában az oldalak négyzetének összege egyenlő az átlók négyzetének összegével. Így ha az ismeretlen oldal hossza x egység, akkor

$$2x^2 + 2 \cdot 10,5^2 = 13^2 + 20^2, \qquad x^2 = 174,25, \qquad x \approx 13,20 \text{ egység.}$$

A paralelogramma kerülete, $k \approx 47,40$ egység.

2. Azonos átalakításokkal, rendezéssel, majd felhasználva, hogy az $x \mapsto \lg x$ ($x \in \mathbf{R}^+$) függvény kölcsönösen egyértelmű,

$$\lg(x+9) + \lg|x-1| + \lg 4 = \lg 100, \qquad (x > -9,\ x \neq 1),$$
$$(x+9) \cdot |x-1| = 25.$$

Ha $-9 < x < 1$, akkor $x^2 + 8x - 9 = -25$, $(x+4)^2 = 0$, $x_1 = -4$;
ha $x > 1$, akkor $x^2 + 8x - 9 = 25$, így $x_2 = -4 + 5\sqrt{2}$.
($x_3 = -4 - 5\sqrt{2}$ nem megoldás.) Az egyenlet megoldásai x_1 és x_2.

3. Azoknak a $P(x;y)$ pontoknak a halmazát keressük, amelyekre $PA^2 + PB^2 + PC^2 = 30$. A távolságok négyzetét a koordinátákkal kifejezve:

$$(x+2)^2 + y^2 + (x-2)^2 + y^2 + x^2 + (y-5)^2 = 30,$$

azaz $x^2 + \left(y - \frac{5}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}$. A keresett ponthalmaz kör. A kör középpontja $C\left(0; \frac{5}{3}\right)$, sugara $r = \frac{4}{3}$.

4. Legyen a mértani sorozat első tagja a, hányadosa q. A feltétel szerint

$$7(aq + aq^2) + 2(a + aq^3) = 0,$$
$$7aq(1+q) + 2a(1+q)(1-q+q^2) = 0,$$
$$a(q+1)(2q^2 + 5q + 2) = 0,$$

így $q = -1$ vagy $q = -2$ vagy $q = -\frac{1}{2}$.
Mivel $a \cdot \frac{q^5 - 1}{q-1} = 22$, azért ha $q = -1$, akkor $a = 22$, ha $q = -2$, akkor $a = 2$, ha $q = -\frac{1}{2}$, akkor $a = \frac{11}{16}$.

5. Ismeretes, hogy $\frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \operatorname{ctg}^2 x$ ($x \neq k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$), így $\sin^2 x = \frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 x}$. A feltételből $\operatorname{ctg} x + \frac{1}{\operatorname{ctg} x} = -4$, ahonnan

$$\operatorname{ctg} x = 2 - \sqrt{3} \quad \text{vagy} \quad \operatorname{ctg} x = 2 + \sqrt{3}. \qquad \operatorname{ctg}^2 x = 7 - 4\sqrt{3} \quad \text{vagy} \quad \operatorname{ctg}^2 x = 7 + 4\sqrt{3},$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{8 - 4\sqrt{3}} = \frac{8 + 4\sqrt{3}}{16} = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{8} = \frac{(\sqrt{3}+1)^2}{(2\sqrt{2})^2} \text{ vagy } \sin^2 x = \frac{1}{8 + 4\sqrt{3}} = \cdots = \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\right)^2,$$

így

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} \text{ vagy } \sin x = -\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} \text{ vagy } \sin x = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} \text{ vagy } \sin x = -\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}.$$

(A feladat más módon is megoldható.)

6. Ha $p = 1$, akkor az $x \mapsto 6x - 1$ ($x \in \mathbf{R}$) függvénynek nincs legnagyobb értéke.
Az adott másodfokú ($p \neq 1$) függvénynek ($x \in \mathbf{R}$) akkor van legnagyobb értéke, ha $p - 1 < 0$, $p < 1$. Teljes négyzetté alakítással:

$$x \mapsto (p-1)\left(x + \frac{p+2}{p-1}\right)^2 + \left(p - 2 - \frac{(p+2)^2}{p-1}\right).$$

Ennek legnagyobb értéke (-6), tehát

$$p - 2 - \frac{(p+2)^2}{p-1} = -6, \qquad \text{ahonnan} \qquad p = -8.$$

Ezt a legnagyobb értéket az $x_0 = -\dfrac{p+2}{p-1}$ helyen veszi fel a függvény, tehát $x_0 = -\dfrac{2}{3}$.

7. Legyen D az $x^2 + px + q = 0$ egyenlet diszkriminánsa; a két gyök: $x_1 = 4$, $x_2 = \dfrac{D}{2}$. Így az egyenlet:

$$x^2 - \left(4 + \frac{D}{2}\right) x + 4 \cdot \frac{D}{2} = 0,$$

ahonnan $D = \left(4 + \dfrac{D}{2}\right)^2 - 8D$, tehát $D = 4$ vagy $D = 16$. Az egyenlet ekkor $x^2 - 6x + 8 = 0$, $p = -6$, $q = 8$ vagy $x^2 - 12x + 32 = 0$, $p = -12$, $q = 32$.

8. Mivel a parabola érinti az x tengelyt, azért egyenletét $y = a(x-u)^2$ alakban kereshetjük. Az A pont rajta van a parabolán, tehát $2 = a(3-u)^2$. Az A pontban a parabolához húzott érintő egyenlete: $4x + y = 14$, így a $14 - 4x = a(x-u)^2$ egyenlet diszkriminánsa 0.

$ax^2 - 2(au-2)x + au^2 - 14 = 0$, $4(au-2)^2 - 4a(au^2 - 14) = 0$, ahonnan $a(7-2u) = -2$, $a = \dfrac{2}{2u-7}$, tehát $2 = \dfrac{2}{2u-7} \cdot (3-u)^2$, $(u-4)^2 = 0$, $u = 4$, $a = 2$.

A parabola egyenlete: $y = 2(x-4)^2$.

Rábai Imre