Ez év március 29. és április 5. között került sor, ezúttal Budapesten, immár a tizenkettedik alkalommal az izraeli és magyar diákok közötti matematikaversenyre. A két országot, most először, hattagú csapatok képviselték. A magyar csapat tagjai a következők voltak:

Csikvári Péter 11. évf. (Fővárosi Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium);
Csóka Endre 10. évf. (Fazekas Mihály Gimnázium, Debrecen);
Harangi Viktor 11. évf. (Fővárosi Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium);
Horváth Illés 11. évf. (Fővárosi Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium);
Vizer Tibor 12. évf. (Révai Miklós Gimnázium, Győr);
Vörös László 12. évf. (Piarista Gimnázium, Kecskemét).

A verseny első két napján a Nemzetközi Matematikai Diákolimpiák lebonyolítása szerint három-három feladattal kellett megbirkózniuk a versenyzőknek. Mindkét napon 4,5 óra gondolkodási idő állt rendelkezésre és az egyes feladatok kifogástalan megoldásával 7-7 pontot lehetett szerezni. A feladatsor meglehetősen nehéznek bizonyult, a legnehezebb, hatodik feladatra nem érkezett teljes megoldás.

A legjobb eredményt *Ran Tessler* izraeli diák érte el 38 ponttal. A magyar versenyzők teljesítménye a következőképpen alakult: *Csóka Endre:* 37 pont; *Csikvári Péter:* 31 pont; *Harangi Viktor:* 30 pont; *Vörös László:* 27 pont; *Horváth Illés:* 12 pont; *Vizer Tibor:* 11 pont.

Bár a verseny egyéni volt, természetesen kiszámoltuk a két csapat összpontszámát: eszerint, akárcsak az egyéni versenyben, a vendégek egyetlen ponttal bár, de megelőzték a magyar csapatot.

A harmadik napon a hagyományos csapatversenyre került sor. A téma, amit egy hónappal korábban megkaptak a felkészülő diákok, a verseny magyar névadója, *Turán Pál* tiszteletére a következő volt: *Extremális gráfok és Turán típusú tételek*. A csapatverseny feladatsorát *Simonovits Miklós,* a Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet tudományos tanácsadója állította össze. A kitűnően felkészült csapatok lényegében valamennyi feladatot megoldották.

Az utolsó oldalon a versenyen készült fényképek láthatók.

A továbbiakban a verseny magyar résztvevőinek beszámolóját közöljük: hogyan látták ők ezt a néhány napot.

⋆

A budapesti Lauder Javne iskola volt a vendéglátója az idei találkozónak, amely szokás szerint a kétnapos egyéni versennyel kezdődött 2001. március 30-án, pénteken. Külön kihívás volt számunkra, hogy a sabbath, a zsidó szombat miatt a második versenynapot csak naplemente után kezdhettük. Így mi este 6 órakor, az izraeliek pedig 8-kor vágtak neki a 4 és fél órás versenynek. Meglehetősen nehéz volt végig koncentrálni.

Másnap a kiránduláson pihenhettük ki a fáradalmakat. Fogaskerekűvel felmentünk a János-hegyre, ahol a kilátóból megcsodálhattuk Budapest látképét, majd lelibegőztünk. Ekkor adódott először lehetőségünk arra, hogy megismerkedjünk az izraeli diákokkal.

A hétfői csapatverseny kellemes légkörben telt el – ennek az eredménye ugyanis nem számított bele a két egyéni dolgozat értékelésébe. A feladatok is könnyebbnek bizonyultak, csupán a 2. feladatot nem oldotta meg az összes csapat.

Kedden délelőtt két előadást hallgattunk meg angol nyelven; az izraeliek kísérőtanárát, majd *Simonovits Miklóst,* a csapatverseny feladatainak összeállítóját. Ezután a díszebédén belekóstolhattunk a kóser konyhaművészetbe. Lehetőségünk nyílt közös játékra is, és tapasztalhattuk, hogy Izraelben is igen népszerű a foci. A folytatásban *T. Sós Vera* és *Tardos Gábor* adott elő a Lauder iskola csodálatosan felszerelt multimédia termében. Mindketten a matematika egymástól távol eső területeinek meglepő kapcsolatáról beszéltek. Végül megnéztünk egy angol nyelvű, Erdős Pálról szóló dokumentumfilmet.

Az utolsó napon a búcsúünnepségen tudtuk meg, hogy összesítésben egy ponttal kikaptunk. Nem baj, majd a diákolimpián...

Csikvári Péter, Gerencsér Balázs, Harangi Viktor, Horváth Illés Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 11. o.t.

12. Gillis–Turán Matematikaverseny, 2001 tavaszán

Első nap

1. Keressünk olyan pozitív egész x, y, z számokat, amelyekre

$$2000x^2 + y^2 = 2001z^2,$$

továbbá, amelyekre teljesül, hogy $x > z > 1999 \cdot 2000 \cdot 2001 > y$.

2. Adottak az e egyenesen az A, B, C és D pontok ebben a sorrendben. Mi azon P pontok mértani helye a síkban, amelyekre az APB és a CPD szögek egyenlők?

3. Határozzuk meg azokat a folytonos f függvényeket, amelyekre minden x valós számra

$$f\big(f(x)\big) = x + f(x).$$

Második nap

4. $p(x) = x^3 - 3x + 1$. Adjunk meg olyan harmadfokú polinomot, amelynek a gyökei a $p(x)$ gyökeinek az ötödik hatványai.

5. Az ABC háromszög beírt körének középpontja I, B_1 és C_1 az AC, illetve az AB oldalak felezőpontjai. A C_1I és B_1I egyenesek B_2-ben és C_2-ben metszik AC-t, illetve AB-t. Tudjuk, hogy az ABC és az AB_2C_2 háromszögek területe egyenlő. Mekkora a CAB szög?

6. Adott 32 pozitív egész úgy, hogy egyikük sem nagyobb 60-nál, az összegük pedig 120. Bizonyítsuk be, hogy két egyenlő összegű csoportba rendezhetők.

Csapatverseny

Az alábbi feladatokban G_n mindig n-pontú egyszerű (többszörös élek nélküli, hurokél mentes) gráf, K_n pedig az n-pontú teljes gráf. $e(G_n)$ a G_n éleinek a számát jelöli.

A feladatok

1. Bizonyítsuk be, hogy ha K_n éleit n színnel színezzük úgy, hogy minden szín ténylegesen előfordul, akkor az így kapott színezett gráf tartalmaz olyan háromszöget, amelynek élei különböző színűek.

2. Bizonyítsuk be, hogy ha

$$e(G_n) \geq \frac{n^2}{4} + 2,$$

akkor G_n tartalmaz két olyan háromszöget, amelyeknek egyetlen közös csúcsa van.

3. Bizonyítsuk be, hogy ha

$$e(G_n) > \frac{1}{2} n\sqrt{n} + \frac{n}{4},$$

akkor G_n tartalmaz 4 hosszúságú kört.

4. a) Jelölje $K(2,\ 3)$ azt a teljes páros gráfot, amelynek 3 fekete és 2 fehér csúcsa van. Bizonyítsuk be, hogy ha G_n nem tartalmazza $K(2,\ 3)$-at, akkor

$$e(G_n) \leq \frac{1}{\sqrt{2}} n\sqrt{n} + n.$$

b) Bizonyítsuk be, hogy ha adott $n \geq 16$ pont a síkon, akkor a köztük fellépő távolságok közül legfeljebb $n\sqrt{n}$ lehet egységnyi hosszú.

5. Legyen p adott prím és tekintsük az $(x,\ y)$ egész számpárokat $\bmod\ p$. Készítsük el azt a gráfot, amelynek csúcsai ezek a párok, és két csúcs, $(x,\ y)$ és $(x',\ y')$ között pontosan akkor halad él, ha

$$xx' + yy' \equiv 1 \pmod{p}.$$

Az ily módon esetleg létrejövő hurokéleket hagyjuk el a gráfból.

a) Bizonyítsuk be, hogy az így kapott gráf nem tartalmaz 4 hosszúságú kört.

b) Bizonyítsuk be, hogy az n végtelen sok értékére létezik olyan G_n gráf, amelyiknek legalább

$$\frac{1}{2} n\sqrt{n} - n$$

éle van és nem tartalmaz 4 hosszúságú kört.

⋆

Az alábbiakban közöljük a verseny legnehezebb feladatának a megoldását.

6. *Adott* 32 *pozitív egész úgy, hogy egyikük sem nagyobb* 60*-nál, az összegük pedig* 120*. Bizonyítsuk be, hogy két egyenlő összegű csoportba rendezhetők.*

Megoldás. Az állítás bizonyítását több segédtételre bontjuk. A bizonyítás során föltesszük, hogy az adott számok, $a_1, a_2, \ldots, a_{32}$ nagyság szerint növekvő sorba vannak rendezve.

1. Lemma. *Ha a pozitív egész számokból álló a_i sorozatra teljesül, hogy*

$$a_i \leq 1 + \sum_{j<i} a_j$$

minden $1 \le i \le n$ esetén, akkor a sorozat „univerzális", azaz minden 1 és $\sum_{i=1}^{n} a_i$ közötti pozitív egész előáll az a_i különböző elemeinek az összegeként.

A lemma állítása többé-kevésbé ebben a formában az 1960. évi *Kürschák* verseny 2. feladata volt, és azóta lényegében közismertté vált. A bizonyítás teljes indukcióval történhet, és megtalálható *Hajós György–Neukomm Gyula–Surányi János:* Matematikai Versenytételek II. című alapvető művében. (Tankönyvkiadó, Budapest, 1988)

Ha a sorozat részletösszegei helyett a sorozat tagjait vizsgáljuk, akkor az alábbi, könnyebben kezelhető elégséges feltételt kapjuk:

Ha $a_i \le i$ teljesül minden $1 \le i \le n$ esetén, akkor az a_i sorozat univerzális.

A bizonyítás nyilvánvaló, és ahogyan például az egyik legismertebb univerzális sorozat, a 2-hatványok sorozata mutatja, a feltétel valóban csupán elégséges.

2. Lemma. Ezt a lemmát is általános alakban mondjuk ki, mert ebben a formában a paraméterek különböző értékeire is felhasználjuk majd a bizonyítás során.

Ha adott m darab növekvően elrendezett pozitív egész szám, amelyek S összegére $S < 4m - 6$ (ez most nyilván teljesül, hiszen $S = 120 < 4 \cdot 32 - 6$) akkor a sorozatra teljesül $a_i \le i$, ha $3 \le i \le m - 2$.

(Az adott intervallum akkor nem üres, ha $m > 4$, de ez most nyilván teljesül.) Ez azt jelenti, hogy az 1. Lemma következményeként adódó feltétel csak a sorozat kezdetén és végén sérülhet.

Bizonyítás.

Az alábbi becslés nyilvánvaló:

(1)
$$S = \sum_{j<i} a_j + \sum_{j \ge i} a_j \ge \sum_{j<i} 1 + \sum_{j \ge i} a_i = (i-1) + a_i(m+1-i),$$

és így

(*)
$$a_i \le \frac{S+1-i}{m+1-i} = 1 + \frac{S-m}{m+1-i}.$$

Eszerint az $\frac{S-m}{m+1-i} < i$ egyenlőtlenségből következik az $a_i \le i$ feltétel. Ez utóbbi pedig egyenértékű a másodfokú

(2)
$$f(i) = i^2 - (m+1)i + S - m < 0$$

egyenlőtlenséggel. Mivel $f(3) = f(m-2) = 6 - 4m + S$, ami a feltétel $(S < 4m - 6)$ szerint valóban negatív, a lemma állítását igazoltuk.

Megjegyzés. Érdemes felfigyelni arra, hogy a (2) egyenlőtlenség szerint a növekvő módon elrendezett a_i sorozatban az $\frac{m+1}{2}$-dik, középső tagra szimmetrikusan sérülhet az $a_i \le i$ feltétel.

3. Lemma. *Ha (a korábbi jelölésekkel) $a_1 \le a_2 \le \dots a_m \le S/2$, és az első $m-2$ tag univerzális sorozatot alkot, akkor $S/2$ előáll a sorozat néhány elemének az összegeként.*

Bizonyítás. Mivel $a_m \le S/2$ és $S - a_{m-1} = a_m + \sum_{i=1}^{m-2} a_i \ge S/2$, ezért bármely pozitív egész előáll ebben az intervallumban.

Térjünk most rá a feladat állításának a bizonyítására. Ha a sorozat „alacsony értékekkel kezdődik", azaz már az első elemtől kezdve univerzális, vagyis $a_1 \le 1$ és $a_2 \le 2$, akkor a 2. lemma szerint az első $m - 2 = 30$ szám univerzális sorozatot alkot, és így a 3. lemma szerint készen vagyunk.

Ha nem ez a helyzet, akkor $a_1 + a_2 \ge 4$. Mivel láttuk, hogy $a_i \le i$, ha $m - 2 = 30 \ge i \ge 3$, mindenképpen teljesül, hogy $a_3 \le 3$. Az elemek rendezése miatt így $a_2 \le 3$. Két esetet különböztetünk meg aszerint, hogy a_2 értéke 2 vagy pedig 3.

1. eset: $a_2 = 2$.

Az $a_1 + a_2 \ge 4$ feltételből most $a_1 \le a_2$ miatt következik, hogy $a_1 = a_2 = 2$. Ismét a 2. lemmát alkalmazzuk. Tegyük félre a két darab 2-est, és rendezzük a sorozat páratlan értékű tagjait tetszőlegesen párokba. Ez most megtehető, hiszen a számok összege páros. Így legalább $m - 2 \ge 15 = \left\lceil \frac{32-2}{2} \right\rceil$ páros számot kapunk. Most $a_{31} + a_{32} \le 120 - (a_1 + a_2) - 28 \cdot 2 = 60$, tehát ebben az esetben az eredeti sorozat bármely két tagjának az összege kisebb vagy egyenlő, mint 60. Felezzük meg a két darab 2-essel együtt összesen $m \ge 17$ darab **páros** számot! Így az

$$1 = b_1 = b_2 \le b_3 \le b_4 \le \dots \le b_m \le 30$$

sorozatot kapjuk, amelyre $\sum_{j=1}^{m} b_j = 60$.

Erre a „felezett” sorozatra még mindig teljesül, hogy $4m-6 \geq 4 \cdot 17-6 > 60$, tehát a 2. lemma szerint $b_j \leq j$, ha $3 \leq j \leq m-2$, és mivel $b_1 = b_2 = 1$, a 3. lemma felhasználásával következik, hogy a b_j sorozat elemeiből előállítható a 30. Ez pedig, 2-vel szorozva, a 60 előállítását adja az a_i sorozat elemeiből.

2. eset: $a_2 = 3$.

Láttuk, hogy $a_3 \leq 3$, ezért most $a_3 = 3$. Az előző trükk most is működik: megmutatjuk, hogy a 3-asokat félretéve a megmaradó számok elegendően sok 3-mal osztható összegű csoportba rendezhetők.

Most $a_{30} + a_{31} + a_{32} \leq 120 - (a_1 + a_2) - 27 \cdot 3 < 60$, tehát a sorozat bármely három tagjának az összege kisebb 60-nál. Az előbbi trükk szerint tegyünk félre két darab 3-ast – láttuk, hogy most van legalább ennyi. A megmaradó 30 szám összege osztható 3-mal, és így legalább $m-2 \geq \left\lceil \frac{32-2}{3} \right\rceil = 10$ csoportba rendezhetők (egyesével, kettesével, illetve hármasával) úgy, hogy a csoportok összege 60-nál kisebb, 3-mal osztható szám. Az így adódó $m \geq 12$ darab számot (a két darab félretett 3-assal együtt) 3-mal elosztva az alábbi sorozatot kapjuk:

$$1 = b_1 = b_2 \leq b_3 \leq \ldots \leq b_m \leq 20, \qquad \sum_{j=1}^{m} b_j = 40.$$

Készen vagyunk, hiszen most is $4m-6 \geq 4 \cdot 12 - 6 > 40$, így a $b_1, b_2, \ldots, b_{m-2}$ univerzális, tehát a 3. lemma szerint $S/2 = 20$ előállítható az elemeiből.

Megjegyzések. 1. Szó szerint ugyanígy igazolható, hogy ha adott $m = 3k+2$ darab szám, amelyek összege $S = 12k$ és egyikük sem nagyobb, mint $S/2$, akkor ezek a számok két egyenlő összegű csoportra oszthatók. (A feladatban $k = 10$, $m = 32$, $S = 120$.) Az is látható, hogy az állítás éles, két példa is mutatja, hogy $3k+1$ darab számra ez már nem feltétlenül tehető meg. Könnyen bizonyítható, hogy bárhogyan osztjuk is két csoportra az alábbi számokat, a csoportokban sosem lehet egyenlő a számok összege.

$$\{\underbrace{1,\ 1,\ \ldots,\ 1}_{3k-2 \text{ db}},\ 3k,\ 3k+1,\ 3k+1\}, \qquad \text{illetve} \qquad \{\underbrace{2,\ 2,\ \ldots,\ 2}_{3k-1 \text{ db}},\ 3k+1,\ 3k+1\}.$$

2. A feladat egy némileg általánosabb probléma – talán legnehezebb – részfeladata. Az általános kérdés a következő: milyen feltétel biztosítja, hogy egy S összegű m elemű halmaz két egyenlő összegű csoportra legyen felbontható (a nyilvánvalóan szükséges $a_i \leq S/2$ feltételen kívül.) Azonnal adódik, hogy ha az S páratlan, akkor ez soha nem tehető meg. Ha S páros, de nem osztható 4-gyel, akkor azt kapjuk, hogy a kritikus elemszám $\frac{S}{2}+1$. Ha S osztható 4-gyel, de nem osztható 3-mal, akkor ez $\left\lceil \frac{S}{3} \right\rceil + 1$, a versenyen kitűzött feladat pedig lényegében annak az esetnek a vizsgálata volt, amikor S osztható 3-mal is és 4-gyel is. Ilyenkor a legalacsonyabb a kritikus elemszám, $\frac{S}{4}+2$. Az olvasó könnyen találhat példákat, hogy az egyes esetekben megadott értékek valóban élesek és a fenti bizonyítás elemeit felhasználva maga is igazolhatja a kimondott állításokat.

3. A feladat egy természetesen adódó algoritmus elemzésével is megoldható, pontosabban úgy is eljuthatunk az alapvető 2. lemma egy változatához. Sajnos ez sem intézi el az idegesítő $a_1 + a_2 \geq 4$ esetet, így a ‚felezési’, illetve ‚harmadolási’ trükk nem látszik elkerülhetőnek.

Az algoritmus leírásakor természetesebben hangzik, ha a feladat szövegét némileg átalakítjuk: a számokról mint súlyokról beszélünk majd – tekintsük őket mondjuk grammokban adott mérőszámoknak –, a feladat pedig azt követeli meg, hogy ezeket a súlyokat két, egyenlő tömegű csoportra osszuk, ha úgy tetszik, egy mérleg két serpenyőjében rendezve el őket. Tekintsük tehát a súlyok növekvően elrendezett sorozatát, és tegyünk a mérleg két serpenyőjébe egy-egy zárt tartályt, amelyekbe pontosan $S/2$ grammnyi tömeg fér.

A legnehezebbikkel kezdve helyezzük el a súlyokat egyesével a tartályokban, az éppen sorra kerülőt a könnyebbik (nem nehezebbik) serpenyőbe téve. Ha elakadunk, azaz a soron következő súly egyik tartályban sem fér el, akkor megállunk. Ha ez a kiegyensúlyozó algoritmus úgy ér véget, hogy valamennyi súlyt sikerült elhelyeznünk, akkor nyilván megvalósítottuk a kívánt felosztást.

Nézzük, mi történik, ha elakadás nélkül sikerült elhelyeznünk az a_i-nél nem könnyebb súlyokat. Ha a két tartály tartalmát ebben az állapotban S_1 és S_2 jelöli ($S_1 \leq S_2$ nyilván föltehető), akkor nyilván $S_1 + S_2 = S - \sum_{j>i} a_j$. Ha most $a_i \leq S/2 - S_2 (\leq S/2 - S_1)$, akkor az a_i súly is elfér, az eljárás tehát nem akad el. Ez biztosan teljesül, ha $2a_i \leq 1 + (S/2 - S_1) + (S/2 - S_2)$. Vegyük észre az 1-est a jobb oldalon, ez azért illeszthető ide, mert egész számokkal dolgozunk. Ez viszont nem egyéb, mint

$$2a_i \leq 1 + S - \sum_{j>i} a_j = 1 + \sum_{j \leq i} a_j$$

– ismerős? – így ha

$$a_k \leq 1 + \sum_{j<k} a_j, \qquad \text{ha} \quad k = m,\ m-1,\ \ldots,\ i,$$

akkor a kiegyensúlyozó algoritmus lépéseivel akadálytalanul elhelyezhetők az

$$a_m \geq a_{m-1} \geq \ldots \geq a_i$$

súlyok! A Kürschák-feladat feltétele ebben az értelmezésben az algoritmus sikeres lefutását biztosítja!

Vegyük észre, hogy mivel a nagy súlyok a feltétel szerint nem nagyobbak $S/2$-nél, az algoritmust el tudjuk indítani. Ezzel becsatlakoztunk a fenti megoldásba, hiszen ott láttuk, hogy $f(i) < 0$-ból következik $a_i \leq i$, ami most elégséges ahhoz, hogy sikeresen lefusson az algoritmus. Az kis kezdőértékek most azt jelentik, hogy amikor elértünk a_3-hoz, akkor ezután az eljárás befejezhető. Ebben a változatban nincs szükség az egyébként triviális 3. lemmára, a megoldás csak azon múlik, hogy jól kezdődik-e a sorozat (akkor végződik jól az algoritmus). Ebben a változatban a megoldás valamivel egyszerűbbé vált, aminek az lehet az oka, hogy itt kizárólag a kiegyensúlyozásra törekszünk, nem foglalkozunk azzal, hogy egyébként milyen számok állíthatók elő a megadott sorozat segítségével.