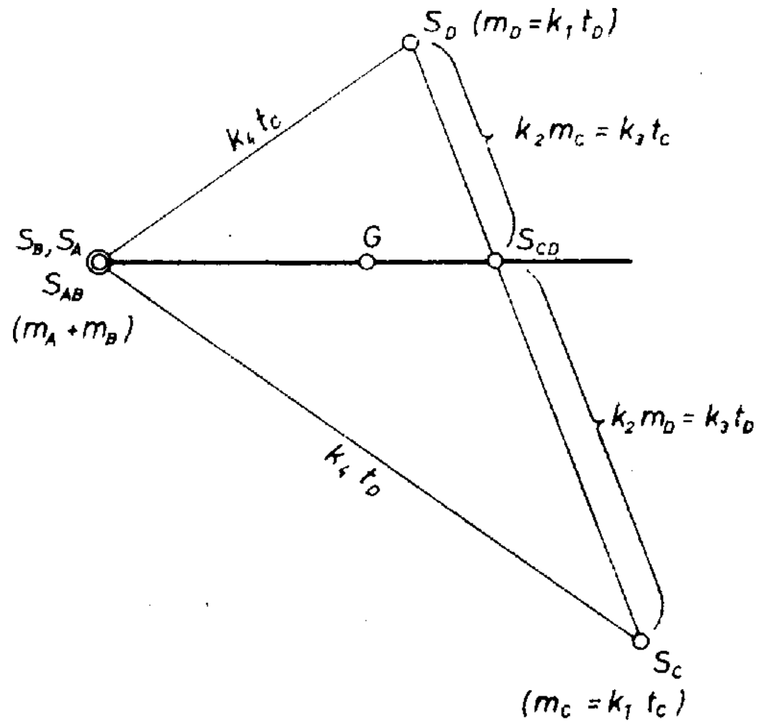
A homogén anyagú BCD háromszöglap geometriai értelemben vett S_A súlypontja egyúttal dinamikai értelemben a rá ható elemi súlyerők eredőjének támadópontja. Ennélfogva e lap $m_A = k_1 t_A$ tömegét S_A-ba sűrítve gondolhatjuk, itt t_A a lap területét, a k_1 arányossági tényező pedig az anyag „felületi sűrűségét" jelenti. Ezt folytatva, elég meghatároznunk a négy S_X pontból álló, t_X tömeget tartalmazó pontrendszer súlypontját – ahol rendre $X = A$, B, C, D –, hiszen k_1-et további közlés hiányában nyilván csak mind a négy lapra vonatkozóan ugyanakkorának vehetjük.



Tovább $2-2$ pontunk tömegét vonjuk össze. Az S_X- és S_Y-beli tömegekből álló pár ($Y \neq X$) közös súlypontja az S_XS_Y szakasznak abban az S_{XY} pontjában van, amelyre (a nyomatékok egyezése alapján) $S_{XY}S_X : S_{XY}S_Y = m_Y : m_X = t_Y : t_X$, másképpen, alkalmas k_2 és k_3 arányossági tényezővel $S_{XY}S_X = k_2 m_Y - k_3 t_Y$. Ugyanezzel az elvvel kapjuk a kérdéses G súlypontot, egyik tömegpárban X-et és Y-t A-nak, B-nek választva, az $S_{AB}S_{CD}$ szakaszon.

Felhasználjuk továbbá, hogy mind a négy XS_X szakasz átmegy az $ABCD$ tetraéder S súlypontján úgy, hogy $SX = 3 \cdot SS_X$, tehát az $S_AS_BS_CS_D$ tetraéder az előbbiből centrális hasonlósággal áll elő. (Az arányszám értéke $-1/3$, de ez nem lesz lényeges.) Ebből következik, hogy az új tetraéder bármelyik két lapja területének az aránya megegyezik a megfelelő eredeti lapok t-arányával, pl. (röviden, jelképesen):

$$(S_AS_BS_C) : (S_AS_BS_D) = (ABC) : (ABD) = t_D : t_C.$$

Vetítsük most az új tetraédert egy, az S_AS_B élére merőleges síkra – más szóval: nézzünk rá végtelen távolból, ebből az irányból –, és jelöljük a vetületeket – mint látszó képeket – ugyanúgy, mint magukat a pontokat. Csak az $S_AS_CS_D$ háromszöget látjuk, tekintsük ebben az S_A-ból induló két oldal arányát. Az S_AS_C és S_AS_D hosszakban az $S_AS_BS_C$, ill. $S_AS_BS_D$ háromszögnek azt a magasságát látjuk valódi nagyságban, amelyik merőleges a közös S_AS_B oldalukra. Ennélfogva arányuk egyezik e két háromszög területének arányával, az pedig az előbbi példa szerint $t_D : t_C$, végül is $S_AS_C = k_4 t_D$, $S_AS_D = k_4 t_C$, ahol k_4 alkalmas arányossági tényező.

Most már az $S_{CD}S_C : S_{CD}S_D = S_AS_C : S_AS_D$ aránypárból következik, hogy S_{CD} rajta van a látszó háromszög S_A-ból induló szögfelezőjén, és hogy ezen a felezőn látjuk a keresett G-t is. Ámde egyeneseink az ábra síkjára merőleges síkoknak a képei, tehát G rajta van az újabb tetraéder $S_AS_BS_C$ és $S_AS_BS_D$ lapjai közti lapszöget felező síkon; így pedig G-nek e két lapsíktól mért távolsága egyenlő; célszerű jelöléssel $r_D = r_C$.

Alkalmazzuk eredményünket úgy, hogy az S_X pontok első párja A és C, majd pedig úgy, hogy B és C legyen, így $r_D = r_B$, majd $r_A = r_D$, tehát G az S_X tetraédernek mind a négy lapjától egyenlő távolságra van. Ezzel bebizonyítottuk a feladat állítását.

Megjegyzések. 1. A bebizonyított állítás a lapsúlypontok igénybevétele nélkül ezt is jelenti: ha a tetraéder mindegyik csúcsába a szemben levő lap területével arányos tömeget teszünk, a pontrendszer súlypontja megadja a tetraéderbe beírható gömb középpontját.

2. Mind a háromszögre, mind a gömbre vonatkozóan hasonló súlypont-értelmezést kapunk a háromszöghöz *hozzáírt* körök (külső érintő körök) középpontjára, ill. a hozzáírt gömbök középpontjára – amennyiben a háromszög valamelyik oldalának negatív súlyt tulajdonítunk (vonzóerő helyett ellentétes irányú, felfelé ható erőt). Tetraéder esetében összesen 8 érintő gömb lehetséges, mert egyszerre 2 lapnak is adhatunk negatív súlyt, de pl. szabályos tetraéder esetében csak 5 jön létre.

3. A bizonyítások természetesen vektorok felhasználásával is végezhetők.