1. A koszinusztétel és a háromszög területképletének alkalmazásával

$$2ab\cos\gamma = a^2+b^2-c^2 \qquad \text{és} \qquad 2ab\sin\gamma = 4T.$$

Emeljük négyzetre az egyenleteket, majd adjuk őket össze:

$$4a^2b^2 = 16T^2 + (a^2+b^2-c^2)^2,$$

ebből következik az első állítás. Innen

$$16T^2 = (2ab+a^2+b^2-c^2)(2ab-a^2-b^2+c^2),$$
$$16T^2 = (a+b-c)(a+b+c)(c+a-b)(c-a+b).$$

Mivel $a+b+c=2s$, $-a+b+c=2(s-a)$, $a-b+c=2(s-b)$ és $a+b-c=2(s-c)$, azért valóban

$$T^2 = s(s-a)(s-b)(s-c).$$

2. Az egyenletnek minden valós x-re van értelme. Emeljük köbre az egyenlet mindkét oldalát. Az így kapott egyenlet az adott egyenlettel ekvivalens, hiszen az $x \mapsto x^3$, $x \in \mathbf{R}$ függvény nyilván szigorúan monoton. Alkalmazzuk az

$$(a+b)^3 = a^3+b^3+3ab(a+b)$$

azonosságot, rendezzük az egyenletet, végezzünk ekvivalens átalakításokat:

$$x+(2x-3)+3\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{2x-3}\cdot\sqrt[3]{12(x-1)} = 12(x-1), 3\sqrt[3]{2x^2-3x}\cdot\sqrt[3]{12}\cdot\sqrt[3]{x-1} = 9(x-1), 12(2x^2-3x)(x-1)-27(x-1)^3$$

Az egyenlet megoldásai: $x_1=1$, $x_2=3$.

3. Alkalmazzuk az $\log_u v = \dfrac{1}{\log_v u}$ $(u>0,\ u\neq 1,\ v>0,\ v\neq 1)$ és az $\log_u v_1 + \log_u v_2 = \log_u v_1v_2$ $(u>0,\ u\neq 1,\ v_1>0,\ v_2>0)$ azonosságokat:

$$\log_a x\cdot\log_b x + \log_b x\cdot\log_c x + \log_c x\cdot\log_a x = \frac{\log_x c+\log_x a+\log_x b}{\log_x a\cdot\log_x b\cdot\log_x c} =$$
$$= \log_a x\cdot\log_b x\cdot\log_c x\cdot\log_x abc.$$

4. $x^2-x+1>0$, $x^2+x+1>0$ és $4x^2+3>0$ minden valós x-re ($x^2-x+1 = \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$, $x^2+x+1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$), és $4x^2+3 > x^2-x+1$ minden valós x-re, hiszen $3x^2+x+2 = 3\left(x+\frac{1}{6}\right)^2+\frac{23}{12}$; hasonlóan $4x^2+3 > x^2+x+1$ minden valós x-re. A három adott kifejezésnek tehát minden valós x-re van értelme, és közülük $\sqrt{4x^2+3}$ a legnagyobb.

A háromszög akkor létezik, ha teljesülnek a háromszög-egyenlőtlenség feltételei, azaz ha

$$\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{x^2+x+1} > \sqrt{4x^2+3}.$$

Mivel mindkét oldal pozitív, azért ez az egyenlőtlenség ekvivalens a következő, négyzetre emeléssel kapott egyenlőtlenségekkel:

$$2x^2+2+2\sqrt{(x^2+1)^2-x^2} > 4x^2+3, 2\sqrt{x^4+x^2+1} > 2x^2+1, 4x^2+4x^2+4 > 4x^4+4x^2+1.$$

Mivel ez utóbbi minden valós x-re teljesül, azért a háromszögek minden valós x esetén léteznek. E háromszögek területe független x-től, hiszen

$$16T^2 = 4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2, 16T^2 = 4(x^2-x+1)(x^2+x+1)-(2x^2+2-4x^2-3), 16T^2 = 4(x^4+x^2+1)-(4x^4+4x^2+1)$$

Rábai Imre