Az évente megrendezett rangos erdélyi verseny feladataiból az alábbiakban közlünk néhányat.

IX. osztály

1. Igazoljuk, hogy az

$$ax^2+2\sqrt{3}bcx+bc(a+b+c)=0, bx^2+2\sqrt{3}cax+ca(a+b+c)=0, cx^2+2\sqrt{3}abx+ab(a+b+c)=0 \text{és}$$

egyenletek közül legalább az egyiknek van valós gyöke, ha a, b és c nullától különböző valós számok.

Bencze Mihály, Brassó

2. Legyenek $G_1, G_2, G_3, E_1, E_2, E_3$ rendre az $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$, $A_1A_2A_3$, $B_1B_2B_3$, $C_1C_2C_3$ háromszögek súlypontjai. Bizonyítsuk be, hogy a $G_1G_2G_3$ és az $E_1E_2E_3$ háromszögek súlypontja egybeesik.

Longávez Lajos, Nagybánya

3. *a)* Bizonyítsuk be, hogy $2^{n+2}\cdot 3^n+5n-4$ osztható 25-tel bármely $n\in\mathbf{N}$ esetén.

b) Határozzuk meg azokat az a természetes számokat, amelyekre bármely $n\in\mathbf{N}^*=\mathbf{N}\setminus\{0\}$ esetén $(a-1)\cdot(a+1)^n+a(n-1)+1$ osztható k-val, ahol $k\geq 1$ egy rögzített természetes szám.

Dáné Károly és *Kosztolányi József*

4. Egy táblára felírtuk a természetes számokat 1-től $(4n-1)$-ig. Egy lépésben a táblán levő számok közül letörlünk kettőt, és helyettük a különbségük abszolút értékét írjuk. Bizonyítsuk be, hogy $4n-2$ lépés után egy páros szám marad a táblán.

Bege Antal, Kolozsvár

X. osztály

1. *a)* Bizonyítsuk be, hogy ha az a_1, a_2, $\ldots$, a_n, b_1, b_2, $\ldots$, b_n pozitív valós számok szorzata 1, akkor $(a_1+b_1)\cdot(a_2+b_2)\cdot\dots\cdot(a_n+b_n)\geq 2^n$.

b) Adott az $a>1$ valós szám. Határozzuk meg az x_1, x_2, $\ldots$, x_{100} 1-nél nagyobb valós számokat, amelyekre

$$\{\log_a x_1+\log_{x_2}a=4, \log_a x_2+\log_{x_3}a=1, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \ldots \log_a x_{99}+\log_{x_{100}}a=4, \log_a x_{100}+\log_{x_1}a=1.$$

Bege Antal, Kolozsvár

2. *a)* Határozzuk meg azokat a z_1, z_2 komplex számokat, amelyekre egyszerre teljesülnek a következő feltételek:

(1) $|z_1|=|z_2|\neq 0$;

(2) $z_1+\dfrac{1}{z_2}$ és $z_2+\dfrac{1}{z_1}$ valós számok.

b) Adott az $A=\{z\in\mathbf{C}\mid |z|=1\}$ és a $B=\{z\in\mathbf{C}\mid |z|\leq 2^n\}$ halmaz, ahol n 1-nél nagyobb rögzített természetes szám. Bizonyítsuk be, hogy

$$B=\{z_1+z_2+\dots+z_{2^n}\mid z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_{2^n}\in A\}.$$

Bíró Béla és *Bencze Mihály*

3. Jelölje R, illetve r a hegyesszögű háromszög köré, illetve a háromszögbe írt kör sugarát, d_a, d_b, d_c pedig a körülírt kör középpontjának a háromszög oldalaitól mért távolságát. Bizonyítsuk be, hogy

a) $d_a+d_b+d_c=R+r$.

b) $\dfrac{a^2}{d_a}+\dfrac{b^2}{d_b}+\dfrac{c^2}{d_c}\geq\dfrac{4s^2}{R+r}$, ahol s a háromszög félkerülete.

4. Egy táblára felírtuk a páratlan természetes számokat 1-től $4n$-ig. Egy lépésben a táblán levő számok közül letörlünk egy a és egy b számot, és helyettük vagy az $a-3b$, vagy a $b-3a$ különbséget írjuk. Elérhető-e, hogy néhány lépés után a táblán szereplő összes szám 0 legyen?

Bege Antal, Kolozsvár

XI. vagy XII. osztály

1. *a)* Az (a_n) $n\geq 1$ sorozatot így értelmezzük:

$$a_1=1,\qquad a_2=2\qquad \text{és}\qquad a_{n+2}=3a_{n+1}-2a_n,\quad \text{bármely } n\in\mathbf{N},\, n\geq 1 \text{ esetén.}$$

Határozzuk meg a sorozat általános tagjának képletét n függvényében.

b) Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenlőtlenségrendszert:

$$\{2x_1 - 3x_2 + x_3 \geq 0, 2x_2 - 3x_3 + x_4 \geq 0, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ldots 2x_{n-1} - 3x_n + x_1 \geq 0, 2x_n - 3x_1 + x_2 \geq 0.$$

2. Elhelyezhető-e a térben 11 pont úgy, hogy az általuk meghatározott egyenesek száma 53 legyen? És 54?

Dáné Károly és *Száva Róbert*

3. Egy sakktábla minden mezőjéhez hozzárendelünk két számot, az első szám azt mutatja, hogy az illető mező a tábla hányadik sorában van, míg a második azt, hogy hányadik oszlopában. Elhelyeztünk nyolc bástyát a táblán úgy, hogy ne legyen köztük kettő, amely üti egymást. Az egyes bástyákat tartalmazó mezőkhöz rendelt számokat összeszoroztuk, majd az így kapott nyolc szorzatot összeadtuk, és eredményül 120-at kaptunk. Ezután a bástyákat levettük a tábláról. Meg lehet-e határozni azokat a mezőket, amelyeken a bástyák álltak? Hány megoldás van?

Dávid Géza, Székelyudvarhely