

Az Egyesült Államokban és Kanadában 1938 óta évente megrendezett főiskolai verseny feladatai a következők voltak:

A1. Legyen A pozitív valós szám. Melyek a $\sum_{j=0}^{\infty} x_j^2$ összegek lehetséges értékei, ha tudjuk, hogy x_0, x_1, x_2, \dots olyan valós számok, amelyekre $\sum_{j=0}^{\infty} x_j = A$ teljesül?

A2. Igazolja, hogy végtelen sok olyan n egész létezik, amelyre $n, n+1$ és $n+2$ egyaránt felírható két négyzetszám összegeként.
(Például: $0 = 0^2 + 0^2$, $1 = 0^2 + 1^2$ és $2 = 1^2 + 1^2$.)

A3. A $P_1P_2P_3P_4P_5P_6P_7P_8$ húrnyolcszög csúcspontjai az adott sorrendben következnek egymás után a kör kerületén. Tudjuk, hogy a $P_1P_3P_5P_7$ négyszög négyzet, amelynek a területe 5 területegység, a $P_2P_4P_6P_8$ négyszög pedig téglalap, amelynek a területe 4 területegység. Legfeljebb mekkora lehet a nyolcszög területe?

A4. Igazolja, hogy a

$$\lim_{B \rightarrow \infty} \int_0^B \sin(x) \sin(x^2) dx$$

improprius integrálnak létezik határértéke.

A5. Három különböző, egész koordinátájú pont egy $r > 0$ sugarú kör kerületén helyezkedik el. Igazolja, hogy közülük két pontot kiválasztva, azok távolsága legalább $r^{1/3}$.

A6. Legyen $f(x)$ egész együtthatós polinom, a_0, a_1, \dots pedig olyan egész elemű sorozat, amelyre $a_0 = 0$ és $a_{n+1} = f(a_n)$, ha $n \geq 0$. Igazolja, hogy ha van olyan pozitív egész m , amelyre $a_m = 0$, akkor vagy $a_1 = 0$, vagy $a_2 = 0$.

B1. Legyenek a_j, b_j és c_j olyan egész számok ($1 \leq j \leq N$), hogy bármely j esetén a_j, b_j és c_j közül legalább az egyik páratlan. Mutassuk meg, hogy ekkor léteznek olyan r, s és t egész számok, hogy $ra_j + sb_j + tc_j$ páratlan legalább $\frac{4N}{7}$ esetben a j ($1 \leq j \leq N$) értékei közül.

B2. Mutassuk meg, hogy $\frac{\binom{m, n}}{n} \binom{n}{m}$ minden $n \geq m \geq 1$ esetén egész, ahol $\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ és (n, m) az n és m legnagyobb közös osztója.

B3. Legyen

$$f(t) = \sum_{j=1}^N a_j \sin(2\pi jt),$$

ahol mindegyik a_j valós, és $a_N \neq 0$. Jelölje $\frac{d^k f}{dt^k}$ az f k -adik deriváltját, N_k a $\frac{d^k f}{dt^k}$ gyökeinek számát (multiplicitással). Mutassuk meg, hogy

$$N_0 \leq N_1 \leq N_2 \leq \dots \quad \text{és} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} N_k = 2N.$$

B4. Legyen $f(x)$ olyan folytonos függvény, amelyre minden x esetén teljesül, hogy $f(2x^2 - 1) = 2xf(x)$. Bizonyítsuk be, hogy $f(x) = 0$, ha $-1 \leq x \leq 1$.

B5. Legyen S_0 pozitív egészekből álló véges halmaz. A következőképpen definiáljuk az S_1, S_2, \dots halmazokat: Egy a egész szám pontosan akkor eleme S_{n+1} -nek, ha a és $a-1$ közül pontosan az egyik benne van S_n -ben. Mutassuk meg, hogy végtelen sok olyan N egész szám van, amelyre $S_n = S_0 \cup \{N+a : a \in S_0\}$.

B6. Legyen B olyan halmaz, amely több, mint $\frac{2^{n+1}}{n}$ különböző $(\pm 1, \pm 1, \dots, \pm 1)$ koordinátájú pontot tartalmaz az n -dimenziós térben ($n \geq 3$). Mutassuk meg, hogy van 3 különböző B -beli pont, amelyek egy egyenlő oldalú háromszög csúcsai.