A legmegszokattabb számok az egész számok és a törtek. Ezeket együttesen *racionális számoknak* nevezzük. Tanulmányaink során a legelső nem racionális szám, amellyel találkozunk, a $\pi$, a kör kerületének és átmérőjének aránya. Az is megtörténik, hogy a tanórán közlik, hogy a $\pi$ nemcsak irracionális, hanem *transzcendens.* Természetesen ennek bizonyítása nem szerepel, de józserivel az sem válik világossá, mik azok a transzcendens számok. Az is előfordul, hogy megemlítik, az $e$ (a természetes logaritmus alapszáma) ugyancsak transzcendens.

Minden bizonnyal $\sqrt{2}$ az első olyan szám, amelyről be is bizonyítják, hogy irracionális, vagyis nem állítható elő két egész szám hányadosaként. Általában is igaz, hogy a „gyökös kifejezések" irracionálisak. Ezek a gyökös kifejezések azért annyiból egyszerűek, hogy valamilyen egész együtthatós polinomjuk 0-t ad. Ha például nézzük az $\alpha=\sqrt{2}+\sqrt{3}$ számot, akkor erre $\alpha^4-10\alpha^2+1=0$ adódik.

*Az olyan számokat, amelyek gyökei egy – nem triviális – egész együtthatós polinomnak, algebrai számoknak nevezzük.* (Triviális az a polinom, amelynek minden együtthatója 0. E polinomnak minden szám gyöke.) Ne gondoljuk azt, hogy algebrai szám ugyanazt jelenti, mint gyökös kifejezés. Például az $x^5-4x+2$ polinom gyökei definíció szerint algebrai számok, de egyiküket sem lehet kifejezni az egész számokból a négy alapművelet és gyökvonások segítségével. De térjünk vissza a transzcendens számokhoz.

*Transzcendenseknek azokat a számokat nevezik, amelyek nem algebraiak.*

Egy transzcendens számot nehéz „elképzelni". Pedig „nagyon sokan vannak". Ha egy tizedestört számjegyeit egymás után véletlenszerűen határozzuk meg, akkor biztosan transzcendens számot kapunk a végén. Csak persze nincs „vége". A $\pi$ vagy az $e$ transzcendenciájának bizonyítása komoly segédeszközöket igényel. Egyébként a $\pi$ transzcendeciájából következik, hogy egy egységnyi oldalú négyzettel azonos területű kör nem szerkeszthető körző és vonalzó „szabályos" felhasználásával.

A továbbiakban meg fogjuk mutatni, hogy viszonylag egyszerűen beláthatjuk bizonyos számokról, hogy azok transzcendensek. Sőt, mi több, olyan számokat adunk meg, amelyeket egész könnyen le lehet írni (mármint a szám jegyeit szolgáló eljárást). Sokan próbálkoztak a $\pi$ jegyeinek egymásutáni meghatározásával; az egyik ilyen próbálkozó személyéről nevezték el Ludolf-féle számnak. Természetesen a próbálkozásokat mindig „elölről" kell kezdeni. Nem lehet az első – mondjuk – ötmillió jegy figyelembe vétele nélkül megadni az ötmillióegyediket. De hasonló igaz a $\sqrt{2}$ jegyeinek a meghatározására is.

Azon számok, az úgynevezett *Liouville*-számok esetében, amelyeket itt fogunk megadni, bármelyik jegyet meg lehet mondani anélkül, hogy ehhez a többi jegyre szükség volna. E számok megkonstruálásánál (pontosabban a transzcendencia bizonyításánál) a racionális számokkal való *approximációra* van szükség. Egy $\alpha$ valós számot törttel approximálni (közelíteni) azt jelenti, hogy a számhoz közel találunk egy törtet. Tulajdonképpen ennél többről van szó, egyre közelebb levő törtet kell találni. Példaképpen szerepeljen itt a következő eljárás:

„Ha $x$ közel van a $\sqrt{a}$-hoz, akkor $\frac{1}{2}\left(x+\frac{a}{x}\right)$ sokkal közelebb van". Az $a=2$ esetben $\sqrt{2}\approx 1,41421356\ldots$ . Ha a $\sqrt{2}\approx\frac{3}{2}$ közelítést vesszük, akkor az egymásutáni értékek: $\frac{17}{12}$, $\frac{577}{408}$, $\frac{665857}{470832}$, $\ldots$ stb. Az ezekre adódó tizedestörtek: $1,5$; $1,41667\ldots$; $1,414216\ldots$; $1,41421356237\ldots$ stb. Láthatjuk, hogy itt minden lépésben nagyjából megduplázódik a helyes jegyek száma. Ez annak a következménye, hogy a „közelítő" $\frac{p}{q}$ tört $\sqrt{2}$-től való eltérése kisebb, mint $\frac{1}{q^2}$. Bizonyítható, hogy ez a jelenség lépésről lépésre öröklődik. Ezt tekinthetjük „jó közelítésnek".

Érdekes jelenség, hogy a racionális számokat nem lehet racionális számokkal jól közelíteni (persze nincs is rá szükség), míg az irracionális számokat lehet. Ez a megfigyelés a kiindulása a transzcendens számok konstruálásának (illetve transzcendenciájuk bizonyításának). Megjegyezzük azonban, hogy a transzcendencia bizonyításához „a jó közelíthetőség" tételéhez nincs szükség.

**Tétel.** *Az $\alpha$ valós számhoz pontosan akkor található végtelen sok olyan (különböző) $\frac{p}{q}$ tört, amelyre $\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{q^2}$, ha $\alpha$ irracionális.*

**Bizonyítás.** Mindenek előtt megjegyezzük, hogy akármilyen $q$ esetén az ilyen nevezőjű törtek közül legfeljebb kettő közelítheti meg $\alpha$-t jobban, mint $\frac{1}{q}$, egyik „balról", másik „jobbról". Ha adott egy $N$ természetes szám, akkor – hasonlóképpen – legfeljebb $2N$ darab olyan $N$-nél kisebb nevezőjű tört van, amely a nevező reciprokánál közelebb van $\alpha$-hoz.

Legyen most először $\alpha=\frac{a}{b}$ racionális szám. Ha $\left|\frac{a}{b}-\frac{p}{q}\right|\le\frac{1}{q^2}$, akkor ebből $|aq-bp|\le\frac{b}{q}$ következik. A $q>b$ esetben tehát $|aq-bp|<1$; ami csak úgy lehet, hogy $aq=bp$ (vagyis $\frac{p}{q}=\frac{a}{b}$), hiszen $-1$ és $1$ között $0$ az egyetlen egész szám. Az előzetes megjegyzés szerint $b$-nél nem nagyobb nevezőjű jól közelítő tört véges sok van, $b$-nél nagyobb nevezőjű pedig egy, így a jól közelítő törtek száma véges.

Legyen most $\alpha$ egy irracionális szám. Itt is egy előzetes megjegyzéssel kezdjük. Tekintsünk egy $N$ természetes számot, és nézzük a $0\alpha$, $1\alpha$, $2\alpha$, $\ldots$, $(N-1)\alpha$, $N\alpha$ számok törtrészét. Példaként álljon itt az $\alpha=\sqrt{2}$ és $N=5$ eset:

| $\{0\sqrt{2}\}$ | $\{1\sqrt{2}\}$ | $\{2\sqrt{2}\}$ | $\{3\sqrt{2}\}$ | $\{4\sqrt{2}\}$ | $\{5\sqrt{2}\}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $0$ | $0,4142\ldots$ | $0,8284\ldots$ | $0,2426\ldots$ | $0,6568\ldots$ | $0,0710\ldots$ |

A számokat rakjuk nagyság szerint sorba:

$$0; \quad 0,0710; \quad 0,2426; \quad 0,4142; \quad 0,6568; \quad 0,8284.$$

Látható, hogy a sorban két olyan lépés is van, amikor az ugrás kisebb, mint $0,2 = \frac{1}{5}$. Egy ilyen „kis ugrás” minden irracionális számnál fellép. Rakjuk sorba nagyság szerint a

$$\{0\alpha\},\ \{1\alpha\},\ \{2\alpha\},\ \dots,\ \{(N-1)\alpha\},\ \{N\alpha\}$$

számokat. Ez $N+1$ darab szám, amelyek mind a $[0,\ 1)$ intervallumba esnek, és az elsőt kivéve egyikük sem racionális, hiszen $\alpha$ sem az. Osszuk most fel a $[0,\ 1]$ intervallumot a $0$, $\frac{1}{N}$, $\frac{2}{N}$, $\dots$, $\frac{N-1}{N}$, $\frac{N}{N}$ osztópontokkal $\frac{1}{N}$ hosszúságú részintervallumokra. Ezeknek az intervallumoknak a száma $N$. A skatulya-elv szerint tehát van olyan intervallum, amelybe a fenti $N+1$ szám közül kettő is jut. Van tehát olyan nemnegatív $k$, $\ell \le N$, amelyre $\{k\alpha\} < \{\ell\alpha\}$ (egyenlők nem lehetnek, mert $\alpha$ irracionális), továbbá $\{\ell\alpha\} - \{k\alpha\} < \frac{1}{N}$ ($\alpha$ irracionalitása miatt itt sem lehet egyenlőség). A törtrészekre vonatkozó elemi összefüggések alapján ebből $0 < \{(k-\ell)\alpha\} < \frac{1}{N}$ következik. Legyen $q = k - \ell$. $0 \le k,\ \ell \le N$ miatt $|q| \le N$. A kapott $\{q\alpha\} < \frac{1}{N}$ összefüggés a következőt jelenti:

*Vannak olyan pozitív $q \le N$ és $p$ egész számok, amelyekre $|q\alpha - p| < \frac{1}{N}$.*

Az is feltehető, hogy $p$ és $q$ relatív prímek. Hiszen, ha $pu$ és $qu$ megfelelnek, azaz, ha $|qu\alpha - pu| < \frac{1}{N}$, akkor $u$-val osztva azt kapjuk, hogy $|q\alpha - p| < \frac{1}{Nu} < \frac{1}{N}$; és persze $q \le qu < N$.

Ebből már azonnal következik az, hogy $\frac{p}{q}$ jól közelíti $\alpha$-t. Valóban, felhasználva a $0 < q \le N$ összefüggést, azt kapjuk, hogy

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{Nq} \le \frac{1}{q^2}.$$

Még azt kell belátni, hogy végtelen sok ilyen tört van. Ez azt jelenti, hogy akármennyi megfelelő törtet veszünk is, mindig található ezektől különböző jól közelítő tört.

Tegyük fel, hogy $\frac{p_1}{q_1}$, $\dots$, $\frac{p_n}{q_n}$ megfelelő közelítő törtek, vagyis a $|q_i\alpha - p_i| = \varepsilon_i$ pozitív számokra $\varepsilon_i < \frac{1}{q_i}$ ($i = 1,\ \dots,\ n$), továbbá $p_i$ és $q_i$ bármely $i$ esetén relatív prímek. Mivel az $\varepsilon_i$ számok pozitívak, ezért van olyan $N$ természetes szám, amely nagyobb, mint ezek bármelyikének a reciproka, vagyis bármely $i$ esetén $\frac{1}{N} < |q_i\alpha - p_i|$. A fenti eljárást erre az $N$-re végezve a kapott $p$ és $q$ számokkal $|q\alpha - p| < \frac{1}{N} < |q_i\alpha - p_i|$ adódik. Ez az egyenlőtlenség nyilván akkor is fennáll, ha $p$ és $q$ legnagyobb közös osztójával egyszerűsítünk. Így $\frac{p}{q}$ nem egyezhet meg a már figyelembe vett törtek egyikével sem, tehát újabb törtet kaptunk.

Ezekután bebizonyítjuk *Liouville*-nek azt a tételét, amelyik azt mondja ki, hogy az algebrai számok nem közelíthetők nagyon jól racionális számokkal.

**Tétel.** *Ha $\alpha$ gyöke egy egész együtthatós $n$-edfokú polinomnak, akkor csak véges sok olyan $\frac{p}{q}$ tört létezik, amelyre $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^{n+1}}$.*

**Bizonyítás.** Mindenekelőtt megjegyezzük, hogy a bizonyításhoz valójában nincs szükség az előző tételre. Az is világos, hogy ez a tétel az $n = 1$ esetben pontosan azt adja, hogy a racionális számok nem approximálhatóak jól.

Mint az előző tételben is láttuk, ha a pozitív $q$ kisebb egy előre megadott $N$ számnál, akkor legfeljebb véges sok törtre lehet $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q}$.

Tegyük fel, hogy $\alpha$ gyöke az egész együtthatós $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ polinomnak, ahol $a_n \ne 0$. Az $f(x)$ polinomnak legfeljebb $n$ gyöke lehet, ezért csak véges sok racionális gyöke van (0 darab is véges sok!). A fenti $N$ számot megválaszthatjuk úgy, hogy az itt szóbajövő törtek nevezőjénél is nagyobb legyen.

Most további törteket fogunk kizárni. Ha $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \ge 1$, akkor a megkívánt egyenlőtlenség nem állhat fenn, ezért feltehető, hogy $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < 1$. Ebből azonnal következik, hogy $\alpha - 1 < \frac{p}{q} < \alpha + 1$, vagyis $\left|\frac{p}{q}\right| < |\alpha| + 1$.

Tekintsünk most egy $\frac{p}{q}$ törtet, ami nem gyöke az $f(x)$ polinomnak. Ez azt jelenti, hogy

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = a_n \left(\frac{p}{q}\right)^n + \dots + a_1 \left(\frac{p}{q}\right) + a_0 \ne 0. \tag{1}$$

A tagokat közös nevezőre hozva és összeadva egy olyan törtet kapunk, amely nem 0, a számlálója egész szám és a nevezője $q^n$. Ez pedig azt jelenti, hogy e tört abszolút értéke legalább $\dfrac{1}{q^n}$, tehát

$$\left|f\left(\frac{p}{q}\right)\right| \geq \frac{1}{q^n}. \tag{2}$$

Tudjuk viszont, hogy $f(\alpha)=0$. Ezért $f\left(\dfrac{p}{q}\right)-f(\alpha)=f\left(\dfrac{p}{q}\right)$ következtében

$$\left|f\left(\frac{p}{q}\right)-f(\alpha)\right| \geq \frac{1}{q^n}. \tag{3}$$

(3) bal oldalát átalakítva olyan összeghez jutunk, amelynek tagjai $a_i\left(\left(\dfrac{p}{q}\right)^i-\alpha^i\right)$ alakúak. Minden egyes ilyen tagból kiemelhető $\left(\dfrac{p}{q}\right)-\alpha$. Ezért a bal oldalon kiemelhető ez a tényező és egy olyan $F\left(\dfrac{p}{q},\,\alpha\right)$ polinom marad, amelynek az együtthatói az $f(x)$ együtthatóiból készíthetők el. Ezek után megvizsgáljuk (3) bal oldalának az abszolút értékét, amire

$$\left|F\left(\frac{p}{q},\,\alpha\right)\right|\cdot\left|\left(\frac{p}{q}\right)-\alpha\right| \geq \frac{1}{q^n} \tag{4}$$

adódik. Most a bal oldal első tényezőjét növelni fogjuk. Ez a tényező

$$\beta_i = a_i\left[\sum_{j=0}^{i-1}\left(\frac{p}{q}\right)^j\alpha^{i-1-j}\right] \tag{5}$$

alakú tagok összege. Felhasználjuk azt, hogy az összeg abszolút értéke legfeljebb akkora, mint a tagok abszolút értékének az összege és a szorzat abszolút értéke megegyezik a tényezők abszolút értékének a szorzatával. A szóbanforgó tényező tehát legfeljebb $|\beta_0|+\cdots+|\beta_n|$. Most egy-egy $\beta_i$ értékét fogjuk felülről becsülni. Legyen $A$ az $a_i$-k abszolút értékének a maximuma. $\left|\dfrac{p}{q}\right| \leq |\alpha|+1$ és a triviális $|\alpha| \leq |\alpha|+1$ alapján (5)-ben $|\beta_i| \leq A\cdot i\cdot(|\alpha|+1)^{i-1}$ adódik. Mivel $|\alpha|+1 \geq 1$, ezért tovább növelünk, ha mindegyik $(|\alpha|+1)^{i-1}$ helyébe $(|\alpha|+1)^n$-t írunk. A vizsgált tényezőben összesen $n+(n-1)+\cdots+1<n^2$ tag van, ezért a vizsgált tényező legfeljebb

$$K = n^2\cdot A\cdot(|\alpha|+1)^n. \tag{6}$$

Ez a $K$ szám nem függ (a „megmaradt") $\dfrac{p}{q}$ törtektől, csak az előre magadott $f(x)$ polinomtól és az $\alpha$ számtól. Azt kaptuk tehát, hogy vannak olyan $K$, $N$ számok, hogy ha $q>N$, akkor

$$K\cdot\left|\alpha-\frac{p}{q}\right| \geq \frac{1}{q^n}.$$

Ha ármost az $M$ számot úgy választjuk, hogy $M>K$ és $M$ nagyobb a fentebb választott $N$ számnál is; továbbá olyan $q$-t választunk, amelyre $q>M$, akkor a legutóbbi egyenlőtlenségből

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right| \geq \frac{1}{q^{n+1}} \tag{7}$$

adódik. Eszerint csak véges sok olyan tört létezik, amelyikre (7) nem teljesül.

Az előbbi tétel segítségével előállíthatunk végtelen sok transzcendens számot, az úgynevezett *Liouville* számokat.

**Tétel.** Tetszőleges $m>1$ természetes számra létezik az

$$\alpha_m = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{m^{n!}} \tag{$*$}$$

végtelen összeg, amely transzcendens számot állít elő.

**Bizonyítás.** Azt kellene mindenekelőtt bizonyítani, hogy a fenti „végtelen összeg" értelmesen definiálható. Ez nem okozna túl nagy nehézséget, de könnyen értelmezhető az $m=10$ esetben. Azért választjuk ezt az esetet, mert számrendszerünk alapszáma 10. Hasonló eljárás alkalmazható minden más $m$ esetében, ha az $m$ alapú számrendszerben dolgozunk.

Legyen tehát $\alpha = \alpha_{10}$. A $(*)$ felírás most egy végtelen tizedestörtet szolgáltat. Ebben a tizedestörtben az $i$-edik helyen 1 áll, ha alkalmas $n$ természetes számra $i = n!$ (0 nem természetes szám), a többi helyen pedig 0 áll. A kapott szám tehát

$$\alpha = 0,110001000000000000000000100\dots$$

alakú. Most tetszőleges $k > 2$ egész számra értelmezzük a $\frac{p_k}{q_k} = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{m^{n!}}$ „közelítő" törteket. Ha közös nevezőre hozunk és úgy adunk össze, akkor $q_k = 10^{k!}$ adódik, míg $p_k$ utolsó számjegye 1 lesz. Ezért a fenti tört már egyszerűsíthetetlen alak.

Nézzük ezután a $\gamma_k = \alpha - \frac{p_k}{q_k}$ különbséget. Ez egy olyan tizedestört, amelyben az első 0-tól különböző jegy a $(k+1)!$-adik helyen szerepel és a további jegyek között szerepel a 0 is. Ezért biztosan kisebb annál a racionális számnál, amelyben eggyel előbb szerepel 1, és minden más helyen 0 áll:

$$\gamma_k < \frac{1}{10^{(k+1)!-1}}.$$

Mivel $(k+1)! - 1 = k \cdot k! + (k! - 1) < k \cdot k!$, ezért $\gamma_k < \frac{1}{(q_k)^k}$.

Legyen most $n$ rögzített és tekintsük az összes $k > n+1$ számot. Ezekre

$$\alpha - \frac{p_k}{q_k} = \gamma_k < \frac{1}{(q_k)^k} \le \frac{1}{(q_k)^{n+1}}$$

teljesül. Ezek a törtek mind különbözőek, mert rövidíthetetlen alakban vannak megadva, és ezek különböznek. Eszerint $\alpha$ bármely $n$-re végtelen sokszor „jól közelíthető", tehát egyetlen $n$-re sem lehet gyöke egy nem azonosan 0 egész együtthatós polinomnak; $\alpha$ tehát transzcendens.

**Fried Ervin**