A múlt havi számunkban közreadtuk a 2000. évi Téli Ankét totó-kérdéseit. A telitalálatos szelvény:

X, 2, 1   X, 2, X   2, 1, X,   X, X, 2   1, X.

Az alábbiakban rövid útmutatást adunk a feladatok megoldásához.

1. A kocka hálózatát átalakítva az eredetivel ekvivalens bolyongási feladatot kapunk, ha az A-val szomszédos csúcsokat U-ban, a G-vel szomszédosakat pedig V-ben egyesítjük úgy, hogy U-ból $\frac{2}{3}$, V-ből pedig $\frac{1}{3}$ a továbblépés valószínűsége. Ha p jelöli annak a valószínűségét, hogy U-ból indulva előbb jutunk G-be, mint A-ba, akkor a szimmetria miatt $q=1-p$ annak a valószínűsége, hogy V-ből indulva előbb jutunk G-be, mint A-ba. Így $p=\dfrac{2}{3}q$, ahonnan $p=\dfrac{2}{5}$.

2. Az adatok (a Nap és a Hold tömege, illetve a távolságuk) táblázatból kikereshető számértékeinek felhasználásával közvetlenül adódik, hogy a Föld sokkal nagyobb erőt fejt ki a Napra, mint a Holdra.

Ehhez az eredményhez „fejben” is eljuthatunk, ha figyelembe vesszük a következő közismert tényeket. A Nap és a Hold látószöge (a Földről nézve) gyakorlatilag ugyanakkora, hiszen 1999-ben a Hold éppen eltakarta a Napot. A Nap és a Hold felszíne tehát ugyanolyan arányban áll egymással, mint a Földtől mért távolságaik négyzete. Emiatt ha a sűrűségük egyforma lenne, akkor a gravitációs vonzóerők aránya éppen a két égitest sugarának hányadosával lenne egyenlő. Ez az arány erősen a Nap javára billenti a mérleget, s ezen az erős aszimmetrián az sem segít, hogy a Nap sűrűsége egy kicsit kisebb, mint a Holdé.

3. A betétek sorozata, f_n, Fibonacci-típusú sorozat, amelyről ismert, hogy

$$\frac{f_n}{f_{n-1}}\to\gamma\approx 1{,}618\,03\ldots,$$

ahol γ az aranymetszés aránya, az $x^2-x-1=0$ egyenlet pozitív gyöke.

$$f_{n-1}\approx 10^6:\gamma\approx 618\,033,9887 \quad \text{miatt} \quad f_{n-1}=618\,034$$

választással és az $f_{n-2}=f_n-f_{n-1}$ rekurzióval „visszafelé” számolva a sorozat tagjait $f_{n-18}=144$, $f_{n-19}=154$, $f_{n-20}=-10$, így $n-19\geq 1$, azaz $n\geq 20$, másfelől $n-20\leq 0$, azaz $n\leq 20$. Így $n=20$, $f_1=154$ és $f_2=144$.

4. A homok lepergése önmagában is bonyolult folyamat, amelyet a homokóra függőleges mozgása még bonyolultabbá tesz. Egyszerű elméleti megfontolásokkal nem lehet sem a sietésre, sem pedig a késésre következtetni, a ténylegesen elvégzett kísérletek pedig azt mutatták, hogy mindkét eset előfordulhat.

5. Az ábra hasonlóságainak felhasználásával könnyen megmutatható, hogy a körök sugarai mértani sorozatot alkotnak, így $r=\sqrt{5\cdot 45}=15\,\mathrm{cm}$.

6. A forráshoz az szükséges, hogy a folyadék hőmérsékletének megfelelő telített gőz nyomása meghaladja a folyadék nyomását. Zárt tartály és lassú melegítés esetén a folyadék feletti légtérben levegő és telített gőz található, ezek együttes nyomása (és ezzel együtt a folyadék nyomása is) mindig nagyobb, mint a telített gőz nyomása az esetlegesen képződő buborékokban. Ilyen buborékok tehát nem is jöhetnek létre, a folyadék sosem jön forrásba, hanem lassan, fokozatosan alakul át légnemű halmazállapotúvá.

7. Legalább 99-en biztosan megmenekülhetnek, a leghátul állónak pedig erre $\frac{1}{2}$ esélye van. Ha a leghátsó az előtte álló 99 sapka közül pl. a fehérek számának paritását mondja – pl. „fehér”-t mond, ha ez a szám páros – akkor a látható sapkák és az addig elhangzottak ismeretében minden további elítélt meg tudja mondani, milyen színű sapka van a fején.

8. A gömb tükröző részén visszaverődő fény fotonjainak a gömb középpontjára vonatkoztatott impulzusnyomatéka nem változik az „ütközés” során, ezek a fotonok tehát nem fejtenek ki forgatónyomatékot a gömbre. A fekete felületen elnyelődő fény viszont el akarja forgatni az UFO-t, méghozzá úgy, hogy minél kevesebb fekete részt érjen napfény. Amikor a tükröző oldalát fordítja a Nap felé, az a forgás szempontjából stabil egyensúlyi helyzet, a fordított állás pedig instabil.

9. A **B. 3401.** feladat II. megoldása szerint (lásd e szám 162–163. oldalait) elegendő egyenlő tömegű csomagok esetén megtalálni a maximálisan elszállítható terhet, ehhez pedig az I. megoldás $h(x)$ függvényének a felső határát kell megkeresni. A $\dfrac{3}{x}$ és $\dfrac{11}{x}$ egész értékeit vizsgálva $h(x)$ felső határa $\dfrac{10}{7}$, így a maximális elszállítható teher $14-\dfrac{10}{7}=\dfrac{88}{7}$ tonna, $88+7$ maradéka 3-mal osztva 2.

10. 99 méréssel biztosan ki tudjuk választani a legkönnyebbet, hiszen mindegyik méréssel kiválaszthatunk egy nehezebbet, s azt kidobva egyesével fogyaszthatjuk a még esélyes golyók számát. Meglepő, de ennél hatékonyabb eljárást nem ismerünk!

11. A c/r arány – meglepő módon – tetszőlegesen nagy lehet! Az alábbi eljárással egy adott (c, r) kertből egy megfelelő (c', r') kert készíthető úgy, hogy

$$\frac{c'}{r'} = \frac{c}{r} + \frac{1}{3}.$$

Tekintsünk egy 1 méter sugarú kört és ezen az A_0, A_1, A_2 pontokat, majd a kert minden X virágából mérjük fel az $\overrightarrow{XX_1} = \overrightarrow{A_0A_1}$ és az $\overrightarrow{XX_2} = \overrightarrow{A_0A_2}$ vektorokat, és az X_i pontba ültessük az X-szel azonos fajtájú virágot. Így a kert két eltolt példányát kapjuk, amelyre teljesülnek a feltételek. Végül ha X rezeda, akkor az X, X_1, X_2 hármas – egységnyi sugarú – körülírt körének a középpontjába ültessünk egy cikláment.

Az új kertben $r' = 3r$ rezeda és $c' = 3c + r$ ciklámen lesz, így $\frac{c'}{r'} = \frac{c}{r} + \frac{1}{3}$, így a $\frac{c}{r}$ arány valóban tetszőlegesen nagy lehet.

Megjegyzés. Az $\overrightarrow{A_0A_1}$, $\overrightarrow{A_0A_2}$ vektorokat úgy kell fölvennünk, hogy ne kerüljön egy helyre két virág, és egyetlen ciklámen körül se legyen 3-nál több rezeda. Könnyen látható, hogy így csak véges sok vektort zárunk ki minden egyes alkalommal, így a megfelelő $\overrightarrow{A_0A_i}$ vektorok mindig megadhatók.

12. A klasszikus fizikában a mozgó hullámforrás esetén a Doppler-effektusánál csak a hullámforrásnak a megfigyelő irányába eső sebességkomponense számít, így az éppen merőlegesen mozgó fényforrás színe változatlan maradna. Nagyon nagy sebességeknél azonban a relativisztikus Doppler-formulát kell alkalmaznunk, amely szerint egy „merőlegesen" mozgó fényforrás fényének frekvenciája

$$f' = f\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} < f,$$

az eredetileg zöld színű fény tehát a vörös felé tolódik el. (Ez a transzverzális Doppler-effektusnak nevezett jelenség.)

13. A játékot az első játékos nyeri, mégpedig 4-gyel és 5-tel kezdve is nyerhet. Egyesével haladva rendre kiértékelhetők a kezdőhelyzetek, és azt találjuk, hogy a játék kimenetelét tekintve a kezdőhelyzetek sorozata periodikus, a periódus hossza pedig 32 (és nem 11). Mivel $111 = 3 \cdot 32 + 15$ és 15 zseton esetén – a lépésismétlés korlátozása miatt – a 4 és az 5 is nyerő kezdőlépés, innen kapjuk az állítást.

Megjegyzés. Balszerencsés vagy szerencsés, mindenesetre a 13. számú kérdéshez méltó, hogy a feladat kérdésére sokan úgy válaszolhattak jól, hogy nem tudták, mi az igazság. Elsietett elemzés ugyanis azt látzik mutatni, hogy a nyerő helyzetek sorozata 11 szerint periodikus. Eszerint értékelve az első játékos nyeri a játékot, de nyerő lépése nem a 4 és nem is az 5. Helyesen játszva tehát – okoskodtak sokan – nem kezdhet sem 4-gyel, sem pedig 5-tel, A formális logika következtetési szabályai szerint tehát az első két állítás igaz, hiszen az előtagjuk hamis.

13 + 1. Ez a probléma szerepel a kitűzött feladatok között, részletes megoldását ezért csak később közöljük. Itt most csak annyit árulunk el, hogy Joe partra lépésének helye és az aranyrög közötti x távolságot célszerű független változónak választani, s ennek függvényében keresni a teljes haladási idő minimumát.