1. Legyen a C vetülete az AB *egyenesen* T. A szerkesztés vizsgálata vagy az *előjeles* szakasszal való számolás is mutatja, hogy két megfelelő háromszög létezik. Mivel

$$BT^2 = 5^2 - 4^2 = 3^2 \qquad \text{és} \qquad AT^2 = 5,8^2 - 4^2 = 4,2^2,$$

azért $AB = 4,2 + 3 = 7,2$ egység vagy $AB = 4,2 - 3 = 1,2$ egység. A háromszög területe így $t_1 = 14,4$ vagy $t_2 = 2,4$ területegység.

2. Vonjuk ki az első egyenletből a másodikat, majd rendezzük az így kapott egyenletet 0-ra és alakítsunk szorzattá:

$$x^2 - y^2 = 2(y - x), \qquad\qquad (x - y)(x + y + 2) = 0.$$

Ha $x = y$, akkor $x^2 - 2x - 8 = 0$, az egyenletrendszer megoldásai ekkor $x_1 = 4$, $y_1 = 4$ vagy $x_2 = -2$, $y_2 = -2$.

Ha $x + y + 2 = 0$, akkor $x^2 + 2x - 4 = 0$, a megoldások: $x_3 = -1 + \sqrt{5}$, $y_3 = -1 - \sqrt{5}$ vagy $x_4 = -1 - \sqrt{5}$, $y_4 = -1 + \sqrt{5}$.

3. Az A ponton át a CD szögfelezővel párhuzamosan húzott egyenes a BC egyenest olyan E pontban metszi, amelyre $CE = AC = 5$ (Miért?). Az AEB és a CDB háromszögek hasonlóságából

$$\frac{EA}{\frac{60\sqrt{2}}{17}} = \frac{17}{12}, \qquad EA = 5\sqrt{2}.$$

Az ECA háromszög tehát derékszögű, így az ABC háromszög C csúcsánál fekvő szöge 90°.

$$AB^2 = 5^2 + 12^2 = 13^2, \qquad AB = 13 \text{ egység.}$$

4. *a)* $4x - x^2 \geq 0$ kell, hogy teljesüljön, azaz $0 \leq x \leq 4$. Ha $6 - 2x < 0$, azaz $x > 3$, akkor a $3 < x \leq 4$ számok megoldások. Ha $6 - 2x \geq 0$, $x \leq 3$, akkor a négyzetre emeléssel kapott

$$4x - x^2 > 36 - 24x + 4x^2, \qquad 5x^2 - 28x + 36 < 0, \qquad 2 < x < 3,6$$

egyenlőtlenség a megengedett halmazon az eredetivel ekvivalens, így a $2 < x \leq 3$ számok is megoldások. Az egyenlőtlenség megoldása tehát $2 < x \leq 4$.

b) Az $x^2 - 63 > 0$ és a $\log_{18}(x^2 - 63) > 0$ egyenlőtlenségeknek kell teljesülni. Az $x \mapsto \log_{18} x$ függvény szigorúan monoton növekedő, az $x \mapsto \log_{\frac{3}{4}} x$ szigorúan monoton csökkenő, ezért

$$0 < \log_{18}(x^2 - 63) \leq 1, \qquad 1 < x^2 - 63 \leq 18,$$

azaz $64 < x^2 \leq 81$, $8 < |x| \leq 9$.

Az egyenlőtlenség megoldásai: $-9 \leq x < -8$ vagy $8 < x \leq 9$.

5. A feladatot vektorok segítségével oldjuk meg. (Más módon is megoldható. Hogyan?) A feltételeknek pontosan egy téglalap felel meg. Legyen az AB oldal felezőpontja E, a DC felezőpontja F. Ekkor $\overrightarrow{FE} = (9; -3)$. Mivel az $\overrightarrow{EA}$, $\overrightarrow{EB}$, $\overrightarrow{FD}$, $\overrightarrow{FC}$ vektorok merőlegesek az $\overrightarrow{FE}$ vektorra, és

$$|\overrightarrow{EA}| = |\overrightarrow{EB}| = |\overrightarrow{FD}| = |\overrightarrow{FC}| = \frac{1}{6}|\overrightarrow{FE}|, \qquad \text{azért}$$

$$\overrightarrow{EA} = \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right) = \overrightarrow{FD} \qquad \text{és} \qquad \overrightarrow{EB} = \left(-\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right) = \overrightarrow{FC}.$$

Jelölje O az origót

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{EA} = \left(\frac{7}{2}; -\frac{3}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right) = (4; 0), A(4; 0); \qquad \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{EB} = \left(\frac{7}{2}; -\frac{3}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right) = (3; -3), B(3; -3);$$

A téglalap csúcspontjai: $A(4; 0)$, $B(3; -3)$, $C(-6; 0)$, $D(-5; 3)$.

6. A feltételi egyenletből

$$a(b - 1) = 2b + 33, \qquad a = \frac{2b - 2 + 35}{b - 1}, \qquad (b \neq 1),$$

$a = 2 + \dfrac{35}{b - 1}$, így $b - 1$ osztója 35-nek, tehát $b = 2$, $a = 37$ vagy $b = 6$, $a = 9$ vagy $b = 8$, $a = 7$ vagy $b = 36$, $a = 3$.

Mivel a és b osztható 3-mal, valamint a háromszög-egyenlőtlenségnek is teljesülnie kell, azért a következő négy megoldást kapjuk: $a = 9$, $b = 6$, $c = 6$ vagy $a = 9$, $b = 6$, $c = 9$ vagy $a = 9$, $b = 6$, $c = 12$ vagy $a = 3$, $b = 36$, $c = 36$.

7. A feltételekből $p^2-4q\geq 0$, $x_1+x_2=p$, $x_1x_2=q$, $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=p^2-2q$, tehát $p^2-2q=4$, azaz $2p-2q=2p-(p^2-4)=5-(p-1)^2$ és $p^2-2(p^2-4)\geq 0$, $p^2\leq 8$, $-2\sqrt{2}\leq p\leq 2\sqrt{2}$.

Az $5-(p-1)^2$ értékkészletét keressük, ha $-2\sqrt{2}\leq p\leq 2\sqrt{2}$.

Ekkor

$$-1-2\sqrt{2}\leq p-1\leq -1+2\sqrt{2}, 0\leq (p-1)^2\leq (-1-2\sqrt{2})^2, -(9+4\sqrt{2})\leq -(p-1)^2\leq 0, 5-(9+4\sqrt{2})\leq 5-(p-1)^2\leq 5, -4-$$

8. Az egyenletnek $x=2p$ és $x=-2p$ nem lehet megoldása. Legyen tehát $x\neq 2p$, $x\neq -2p$. Szorozzuk meg az egyenlet mindkét oldalát (x^2-2p^2)-tel, majd rendezzünk. Ekkor

$$(5p+3)x=14p^2.$$

Ha $5p+3=0$, $p=-\frac{3}{5}$, akkor az egyenletnek nincs megoldása. Ha $p\neq -\frac{3}{5}$, akkor $x_0=\frac{14p^2}{5p+3}$ a megoldás, de $x_0\neq 2p$ és $x_0\neq -2p$. $\frac{14p^2}{5p+3}\neq 2p$, $p\neq 0$, $p\neq\frac{3}{2}$ és $\frac{14p^2}{5p+3}=-2p$, $p\neq 0$, $p\neq -\frac{1}{4}$.

Összefoglalva: ha $p\neq -\frac{3}{5}$, $p\neq 0$, $p\neq \frac{3}{2}$, $p\neq -\frac{1}{4}$, akkor az egyenletnek egyetlen megoldása van: $x_0=\frac{14p^2}{5p+3}$, ha $p=-\frac{3}{5}$ vagy $p=0$ vagy $p=\frac{3}{2}$ vagy $p=-\frac{1}{4}$, akkor az egyenletnek nincs megoldása.

Rábai Imre