Amikor felpillantottam és megláttam, hogy a Föld felemelkedik e fölé a csupasz és sivár holdi horizont fölé, a Föld volt az egyetlen színes dolog az űrben, és nagyon törékenynek tűnt, nagyon finomnak. Szinte azonnal arra gondoltam, hogy eljöttünk egészen a Holdig, és mégis a legfontosabb dolog, amit látunk, a saját bolygónk, a Föld.

Bill Anders, az Apollo 8 expedíció asztronautája
(National Geographic Channel: Holdraszállás)

A legutóbbi Kürschák verseny második feladata így szólt:

Legyen ABC szabályostól különböző háromszög, P pedig a síknak a háromszög csúcsaitól különböző pontja. Jelöljék A_P, B_P és C_P rendre az AP, BP és CP egyeneseknek az ABC háromszög köré írt körrel vett második metszéspontjait. Mutassuk meg, hogy a síknak pontosan két olyan P és Q pontja van, hogy az $A_PB_PC_P$ és $A_QB_QC_Q$ háromszögek szabályosak, továbbá, hogy a PQ egyenes áthalad az ABC háromszög köré írt kör középpontján.

Kirándulunk egyet a hiperbolikus síkon, hogy meglássuk, ennek a feladatnak a mélyén az alábbi egyszerű tény áll:

Ha adott az ABC szabályos háromszög és az O' pont, akkor van egy olyan középpontos tükrözés is és egy olyan tengelyes tükrözés is, amelynek alkalmazásával az ABC háromszög olyan helyzetbe hozható, hogy középpontja O' legyen. Ebben az esetben a középpontos tükrözés P centrumát az O' ponttal összekötő egyenes merőleges a tengelyes tükrözés t tengelyére (1. ábra).

Ennek az állításnak a bizonyítása nagyon könnyű, nem lehetne kitűzni komoly versenyen. Megvan viszont az a tulajdonsága, hogy *abszolút*, azaz igazsága nem függ a párhuzamossági axiómától. Alább kiderül, hogy a Kürschák feladat nem más, mint az utóbbi állítás a hiperbolikus síkon, illetve annak egyik térképén.

Az édesapja könyvéhez írt mellékletben,[1]Latinul: appendix, később ez a szó lett Bolyai János művének közkeletű megnevezése. a *Tér abszolút és igaz tudományában Bolyai János* többek között számba vette azokat a tételeket, amelyek a párhuzamossági axiómától függetlenek, a *maradék* axiómákból már következnek. Ugyanakkor megalkotta „új világának", a párhuzamossági axióma tagadására épülő *hiperbolikus geometriának* az elméletét. A hiperbolikus geometriában bármely egyeneshez, bármely rá nem illeszkedő ponton át több párhuzamos is húzható. Kiderült, hogy amennyiben az euklideszi geometria axiómarendszere ellentmondásmentes, annyiban az ő új geometriája is az. Tehát ha az euklideszi geometria létezik – legalábbis a matematikai absztrakció szintjén – akkor a hiperbolikus geometria is.

Az általa, és tőle függetlenül *Gauss* és *Lobacsevszkij* által felfedezett hiperbolikus geometriában sok furcsaság van. Az egyik legalapvetőbb (a párhuzamossági axióma tagadásával ekvivalens), hogy a háromszög szögeinek összege nem 180°, hanem annál kisebb. Az egyenlő oldalú háromszög szögei sem 60°-osak, hanem annál kisebbek. Nem mondható konkrét érték, hogy mekkorák, bármely 60°-nál kisebb α szöghöz található ilyen szögű egyenlő oldalú háromszög. Az $\alpha = 0$ határesetben ez az egyenlő oldalú háromszög elfajul, három „elpattanó" (egymást tetszőlegesen megközelítő, de el nem érő) párhuzamos egyenesből áll (*2. ábra*).

Bolyai és Lobacsevszkij eredményeinek ellenére az új geometria létjogosultságát kevesen ismerték el. Kicsit ahhoz volt hasonlatos a helyzet, ahogy a Föld gömb alakja elfogadottá vált. Ezt néhányan már az Ókorban fölfogták, sokakat csak a világ körüli utazások, az ezek nyomán (és korábban!) készült térképek, atlaszok, földgömbök győztek meg. Az 1970-es években aztán, amikor amerikai asztronauták a holdutazások során fényképeket készítettek a Földről, ezek az emberek milliói számára tették érzékelhetővé: egy golyóbison élünk.

Gauss Bolyaitól és Lobacsevszkijtől függetlenül fedezte fel a hiperbolikus geometriát, de eredményeit nem tette közzé. Sokat foglalkozott a felületek elméletével, és ennek alapján néhányan úgy vélik, szeretett volna egy olyan térbeli felületet találni, amelynek geometriája hiperbolikus. Ez azt jelenti, hogy ha egyenesnek azokat a felületen haladó vonalakat nevezzük, amelyek bármely két pontjukat a legrövidebb – felületi – úton kötik össze, szöget pedig a csúcsa köré rajzolt piciny felületi kör ívével mérünk, akkor e fogalmakra az összes axióma teljesül, kivéve a párhuzamosságit, amelynek hiperbolikus változata lenne érvényes: minden ponton át, minden rá nem illeszkedő egyeneshez *több* azt nem metsző egyenes volna húzható. Gauss nem talált ilyen felületet, [2]Később *David Hilbert* bizonyította, hogy a térben ilyen felület nincs is. A négy dimenziós euklideszi térben viszont van, és a relativitáselmélet alapját képező Lorentz-féle geometria bizonyos síkmetszetei is hiperbolikusak. és talán úgy gondolta, hogy a nem megjeleníthető új geometriával még a tudományos közvélemény elé is reménytelen állnia.

A XIX. század második felében azután születtek olyan modellek, amelyek a hiperbolikus geometriát szemléltetik. Nevezhetjük őket a hiperbolikus geometria térképeinek is. A XX. századi fizika mikro- és kozmikus méretű tereiben, a matematika új területein pedig hemzsegnek a nem kézzelfogható, absztrakt, mégis alkalmazott geometriák, melyekhez Bolyai János munkája úttörő módon járult hozzá.

Hogy jobban megértsük, miről is van szó, vessünk újabb pillantást a gömbre. A gömb két pontja között úgy kapjuk a felületen haladó legrövidebb vonalat, ha a két ponton és a gömb középpontján át síkot fektetünk és megrajzoljuk e sík és a gömb metszésvonalának – az úgynevezett *gömbi főkörnek* – a két pont közötti rövidebbik ívét (*3.a) ábra*). A fővárosunkból New Yorkba repülő naiv utazó meglepődve tapasztalja, hogy a nálunk délebbre található amerikai

11
22

város felé haladva a gép északnyugatnak veszi az irányt, és London, sőt Írország fölött is elrepül. Ezt a látszólagos kitérőt a főkör okozza, amely nem a szélességen, hanem messze fölötte, északra halad, arra a legrövidebb az út.

A gömbről nehéz térképet készíteni, mert bármit próbálunk, valamiképp mindig torzítani fog. Gondoljunk például két egymással 90°-os szöget bezáró hosszúsági kör és az egyenlítő határolta háromszögek egyikére. Ez egy olyan egyenlő oldalú háromszög, amelynek mindegyik szöge 90°-os. A síkban ezt bajos lenne hűen ábrázolni (*3.b) ábra*).

Ha megelégszünk annyival, hogy a gömbi egyenesek, azaz a főkörök térképi megfelelői a sík egyeneseire illeszkedjenek, akkor már készíthetünk elfogadható térképet. Ha a gömb középpontjából a gömb egy részét kivetítjük egy tetszőleges síkra, ilyen térképet kapunk (*3.c) ábra*). Ez a térkép nem ábrázolja az egész gömböt, de ilyen típusú lapokból a teljes gömböt ábrázoló atlaszt állíthatunk össze. Ezt kézbevéve azonban nagyon nehéz eligazodnunk: a térképen leolvasott távolság és szög valóságos (gömbi) távolsággá és szöggé való átszámításához fáradságos módszereket kell kidolgozni.

Készíthetünk olyan térképet is, amely a gömbi szögeket ábrázolja hűen. Ekkor viszont a főkörök képe nem lesz egyenes és továbbra is gondot okoz a térképen kijelölt két pont gömbi távolságának meghatározása, sőt a két pontot összekötő legrövidebb vonal megrajzolása is.

Hiperbolikus geometriával rendelkező felületet nem tudunk úgy a polcon tartani, mint például egy földgömböt. Vannak viszont az említett gömbi térképekhez hasonló tulajdonságú modelljei. A *Cayley–Klein modellben* az egyenesek a 2-dimenziós hiperbolikus világ egyeneseinek felelnek meg, míg a *Poincaré-féle körmodellnek* az a legfőbb erénye, hogy szögtartó. A hiperbolikus sík pontjait mindkét modellben egy körlap belső pontjai ábrázolják. A térképen kijelölt két pont hiperbolikus távolságának és a hiperbolikus szögek[3]A Poincaré modellben ez nem probléma: a térképen látható szög megegyezik a hiperbolikus szöggel. kiszámítási módját itt nem közöljük, de az érdeklődő olvasó utánanézhet a részleteknek a cikk végén említett több könyvben is. Ezekben annak bizonyítása is megtalálható, hogy a modellek világa teljesíti mindegyik euklideszi axiómát, csak a párhuzamosságit nem. Alább csak a hiperbolikus egyenesek fogalmára és azok merőlegességének kérdésére térünk ki.

A Cayley–Klein modellben az alapkör húrjainak az alapkör belsejében fekvő részei felelnek meg a hiperbolikus egyeneseknek. A Poincaré-féle körmodellben az alapkörre merőleges köröknek[4]Két kör szögén a metszéspontjukban húzott érintőik szögét értjük. az alapkör belsejébe eső ívei lesznek a hiperbolikus egyenesek (*4. ábra*). Mindkét esetben olyan a hiperbolikus távolság értelmezése, hogy a modell széléhez közeledve egységnyi térképi távolság egyre nagyobb hiperbolikus távolságnak felel meg, a modell határoló körvonala már a „végtelen távolba vesző" pontoknak, az elképzelt hiperbolikus világhoz már nem tartozó pontoknak felel meg.

A fenti ábrákon látható, hogy a megadott értelmezésben a modell M pontján át több olyan egyenes is van, amely a modell m egyenesét nem metszi, tehát a modellek hiperbolikus világot térképeznek. A nem metsző egyenesek között van két szélső helyzetű, „elpattanó", amelyek a „végtelenben érik el" az m egyenest.

A Poincaré-féle körmodell szögtartó, ezért a merőlegesség „szemmel" leolvasható. Megjegyezzük, hogy az egyenesre való tengelyes tükrözésnek az egyenest reprezentáló körre való inverzió felel meg, ilymódon a Kürschák feladatra a KöMaL előző számában adott első két bizonyítás ezzel a modellel hozható kapcsolatba. Ennek végiggondolását az olvasóra bízzuk és alább a feladatot a Cayley–Klein modell segítségével hozzuk a hiperbolikus geometriával összefüggésbe.

A Cayley–Klein modellben két egyenes akkor merőleges egymásra, ha bármelyikük pólusa[5]Lásd pl. *Kiss György:* A körre vonatkozó polaritás, KöMaL, 1998/8. szám, 450. o. illeszkedik a másik meghosszabbítására. Egyszerűbben fogalmazva: az MN, UV egyenesek akkor merőlegesek egymásra, ha az MN euklideszi egyenes és az alapkör metszéspontjában az alapkörhöz húzott érintők metszéspontja (ami esetleg a végtelenben van) illeszkedik az UV euklideszi egyenesre[6]Nem nyilvánvaló matematikai összefüggés, hogy ez a kapcsolat szimmetrikus: merőlegesség esetén az UV euklideszi egyenes és az alapkör metszéspontjában az alapkörhöz húzott érintők metszéspontja az MN egyenesen lesz. (*5. ábra*). Egy adott egyenesre merőleges egyenesek halmaza – ilyen egyenes végtelen sok van – nem más, mint az egyenes pólusán áthaladó egyenesek serege (illetve azok alapkörbe eső része).

Ezek alapján még nem tudjuk, hogyan kell tükrözni egy pontot a modell egy adott pontjára vagy egy adott egyenesére, de a „végtelen távoli" pontokon nyomon követhetjük a tükrözés hatását. A modell P pontjára való középpontos tükrözésnél ugyanis a P-n áthaladó egyenesek önmagukra képződnek, miközben két „végtelen távoli" pontjuk kicserélődik (*6. ábra*). A p egyenesre való tükrözésnél pedig a p-re merőleges egyenesek képződnek magukra úgy, hogy „végtelen távoli" pontjaik felcserélődnek (*7. ábra*). *Tehát a tükrözések hatása a modell határvonalán épp a Kürschák feladatban leírt transzformáció.* Ha P külső pont, akkor egy tengelyes tükrözésről, ha P belső, akkor egy középpontos tükrözésről, illetve ezeknek a „végtelen távoli" pontokon vizsgált hatásáról van szó.

A feladatban szereplő ABC, $A_PB_PC_P$, $A_QB_QC_Q$ euklideszi háromszögek a modellben „aszimptotikus" háromszögeket reprezentálnak, olyan egyeneshármasokat, amelyek bármely két tagja elpattanó. Az ilyen háromszögek egymással mind egybevágóak és mind szabályosak is: van három szimmetriatengelyük, amelyek egy pontban, az aszimptotikus háromszög középpontjában metszik egymást. Ez Bolyai módszerével, absztraktan, csak az axiómákat használva is igazolható, de most csak modellünkben, az euklideszi geometria segítségével világítunk rá.

Az aszimptotikus háromszögnek szimmetriatengelye bármelyik végtelen távoli csúcsából a szemköztes oldalra ál-

---

33

44

55

66

lított merőleges egyenes. Az erre vonatkozó tengelyes tükrözés ugyanis az adott csúcsot „helyben hagyja", a másik kettőt kicseréli. Ilymódon a háromszög középpontjának létezését az euklideszi geometria egy nevezetes tétele mondja ki: az $A^*B^*C^*$ háromszög beírt, illetve hozzáírt körének A, B, C érintési pontjait a csúcsokkal összekötő AA^*, BB^*, CC^* egyenesek egy ponton mennek át[7]Ez a tétel a 3. bizonyításban is említett Pascal tétel egy speciális esetének is tekinthető. (*8.a), b) ábrák*).

Ebből az is azonnal látható, hogy az ABC aszimptotikus háromszög akkor látszik szabályos euklideszi háromszögnek, ha hiperbolikus középpontja a modellkör középpontja. Tehát a Kürschák feladat a Cayley–Klein féle hiperbolikus térképen azt jelenti, hogy az ABC (aszimptotikus) szabályos háromszöget középpontos tükrözéssel és tengelyes tükrözéssel is áttranszformálhatjuk úgy, hogy szimmetriaközéppontja a modellkör középpontjába kerüljön.

A tükrözési középpontnak természetesen az ABC szimmetriaközéppontját a modell középpontjával összekötő szakaszra – nevezetesen annak hiperbolikus felezőpontjára – kell esnie. A tükrözési tengelynek pedig hiperbolikus értelemben merőlegesnek kell lennie erre az egyenesre, tehát pólusának rá kell esnie (*9. ábra*). Készen is vagyunk: hiperbolikus terepgyakorlatunkon rátaláltunk a Kürschák feladat „természetes élőhelyére".

A P és Q pontokat a következő módon szerkeszthetjük meg: Az OO' szakasz végpontjaiban állitott euklideszi (és egyben hiperbolikus) merőlegessel megrajzoljuk az $XYX'Y'$ húrtrapézt. Az $X'Y$ és XY', illetve az XX' és YY' egyenesek metszéspontja lesz P, illetve Q (*10. ábra*).

Manapság, ha az embernek kedve támad hiperbolikus űrutazásra, azt is megteheti. A minnesotai egyetem Geometria Központjának fantasztikus filmjét, a „Not Knot"-ot nézve a dodekaéderekkel kiparkettázott hiperbolikus térben repülhetünk miközben a szokatlan geometria mellett a csomóelmélettel is ismerkedhetünk. Az íróasztal mellett a megértés belső útjára invitálnak *Reiman István*, valamint *Kálmán Attila* tanár urak könyvei, amelyek segítségével alaposabban megismerkedhetünk a hiperbolikus síkkal és a Cayley–Klein modellel is. *I. M. Jaglom* könyvében a hiperbolikus geometriát a relativitáselmélettel hozza kapcsolatban, míg *Dávid Lajos* a Bolyaiak történetével ismerkedtet meg. De a leghitelesebb forrás maga Bolyai János, akinek alapvető művét *Kárteszi Ferenc* látta el jegyzetekkel, és tette a jelenkor olvasójának számára is hozzáférhetővé. *David Hilbert* a téma másik mestere, *S. Cohn–Vossennel* közösen írt munkájában szemléletes bevezetőt kapunk többek között a felületek elméletébe, a különböző geometriákba és a Poincaré-féle modellbe is. *Lénárt István* különös játékkal ajándékozta meg a világot: rajzgömbjével mindenki maga fedezheti fel a gömb geometriáját.

Ajánlott olvasmányok és webhelyek

Bolyai János: Appendix (A tér tudomány) Kárteszi Ferenc gondozásában, Akadémia Kiadó, Budapest, 1973

Dávid Lajos: A két Bolyai élete és munkássága, Gondolat, Budapest, 1970

Hilbert D., Cohn-Vossen S.: Szemléletes geometria, Gondolat, 1982

Jaglom I. M.: Galilei relativitási elve és egy nemeuklideszi geometria, Gondolat, Budapest, 1985

Kálmán Attila: Nemeuklideszi geometriák elemei, Ifjú matematikusok könyvtára 1., Tankönyvkiadó, Budapest, 1989

Lénárt István: Nem-euklideszi kalandok a rajzgömbön, Múzsák Kiadó Kft. Érdeklődés a gömbről: h12572len@ella.hu

Reiman István: Geometria és határterületei, Szalay Kiadó, 2000

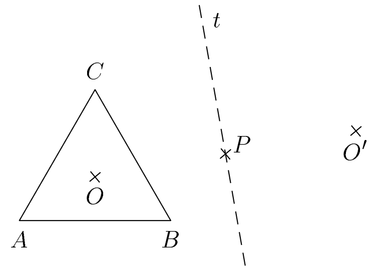
`http://www.geom.umn.edu/graphics/pix/Video_Productions/Not_Knot/`
`http://www.csc.fi/math_topics/Movies/HG.html`
`http://mathworld.wolfram.com/PoincareHyperbolicDisk.html`
`http://www.geom.umn.edu/docs/forum/hype/model.html`

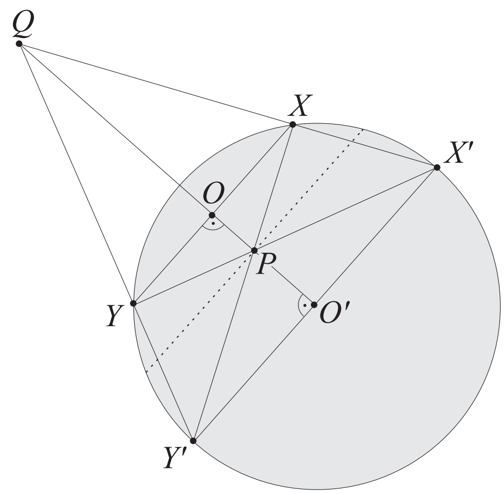
Hiperbolikus geometriai szerkesztőprogramok:
`http://mcs.open.ac.uk/tcl2/nonE/nonE.html`
`http://math.rice.edu/ joel/NonEuclid/`
`http://www.geom.umn.edu/docs/mpeg_play.html`

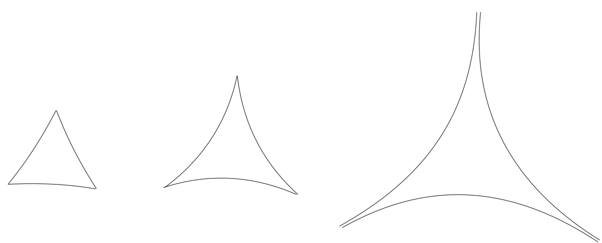
A szerző hálával tartozik *Surányi Lászlónak* egy előadásáért és a hiperbolikus geometriával kapcsolatos diszkusszióért.

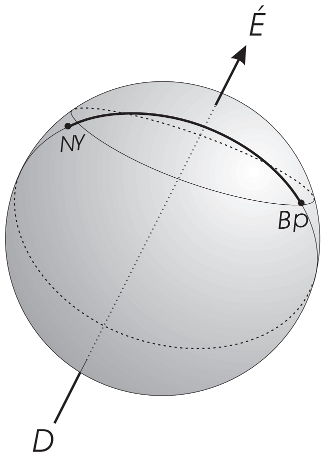
Hraskó András

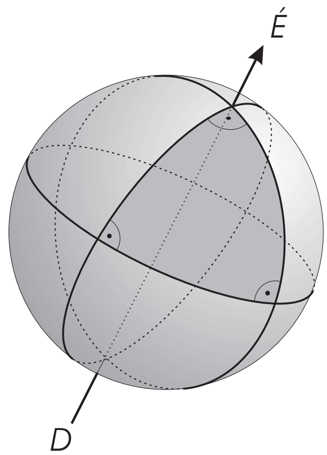
77

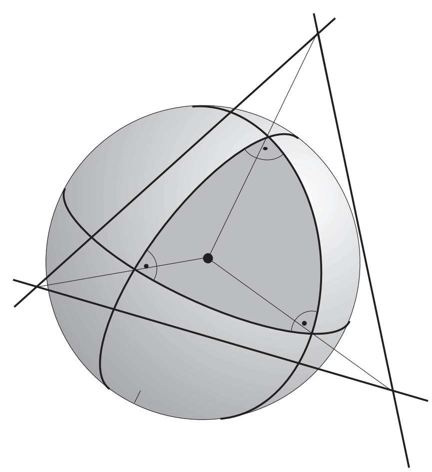

t
C
P
O'
O
A
B

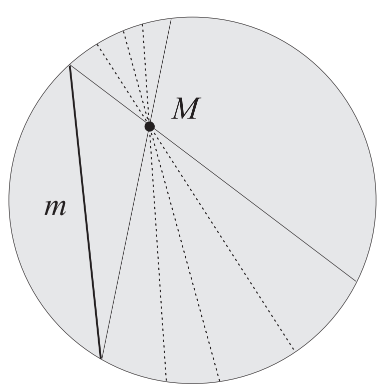

Q
X
X'
O
P
Y
O'
Y'

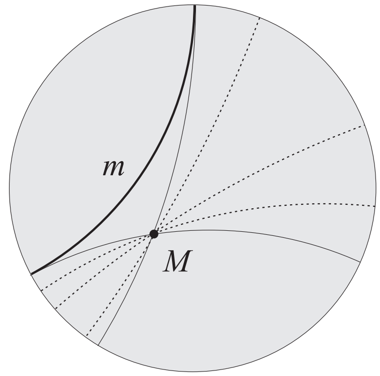


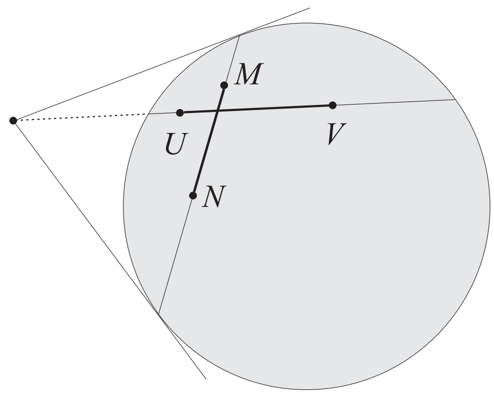

É
NY
Bp
D

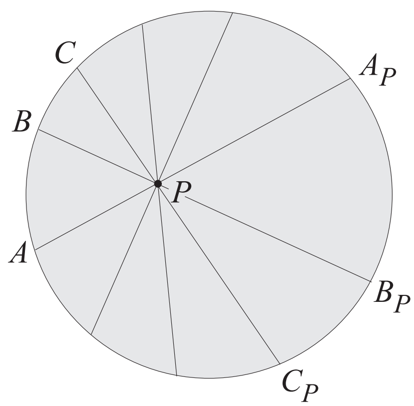

É
D

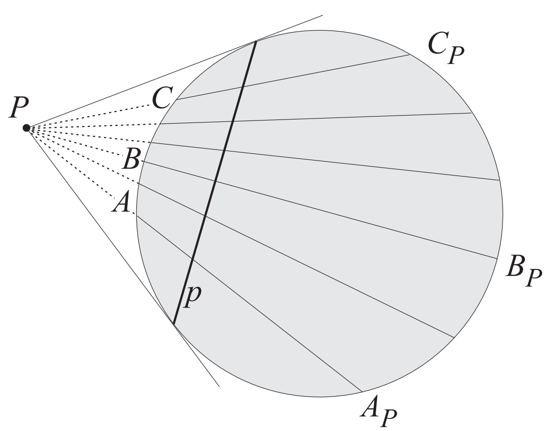


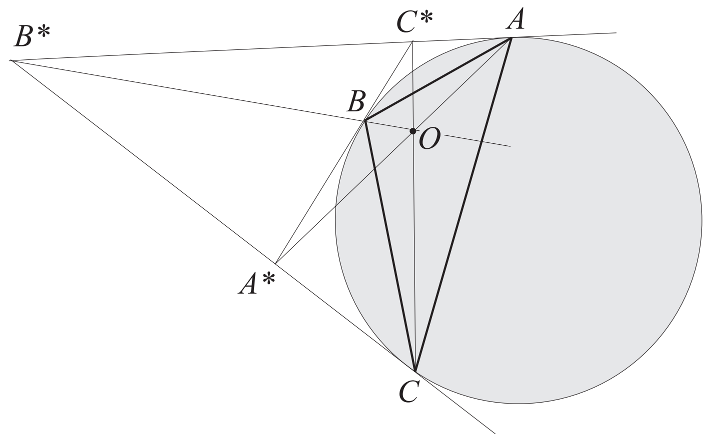

M
m

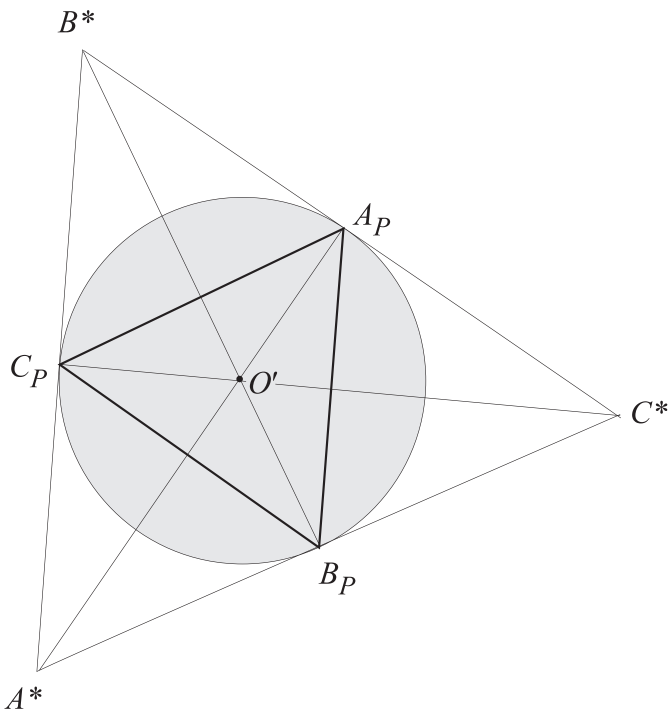

m
M

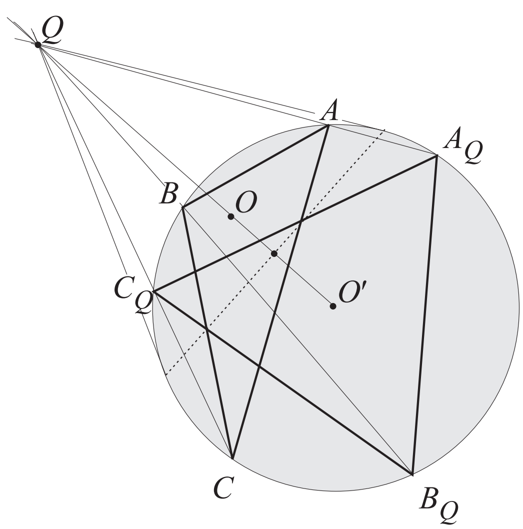

M
U
V
N

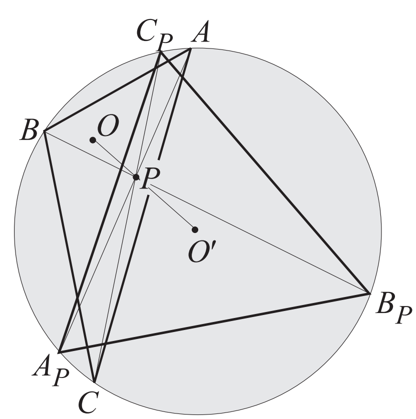

C
A_P
B
P
A
B_P
C_P


C_P
P
C
B
A
B_P
p
A_P


B*
C*
A
B
O
A*
C


B*
A_P
C_P
O′
C*
B_P
A*


Q
A
A_Q
B
O
C_Q
O′
C
B_Q


C_P
A
B
O
P
O′
B_P
A_P
C