1. Ha a munkások számának növekedése $2p\%$, akkor a termelés növekedése $3p\%$. Így

$$\left(1+\frac{2p}{100}\right)\left(1+\frac{3p}{100}\right)=1,265.$$

Legyen $\frac{p}{100}=x$. Ekkor $6x^2+5x-0,265=0$, $x_1=0,05$, $x_2=-\frac{10,6}{12}$. Csak x_1 ad megoldást, ekkor $\frac{5}{100}=\frac{p}{100}$, $p=5$. A munkások száma 10%-kal, az egy főre jutó termelés pedig 15%-kal nőtt.

2. Legyen $B(b;0)$. Ekkor $AB^2=6^2+b^2$ és $6^2+b^2=10^2$, ahonnan $b=8$ vagy $b=-8$, $B_1(8;0)$, $B_2(-8;0)$.

A és S ismeretében a B_1C_1 (illetve B_2C_2) felezőpontja $A'(6;6)$, így $C_1(4;12)$, $C_2(20;12)$. Az AB_1C_1 háromszög területét megkapjuk, ha az $OBC\overline{C}$ trapéz területéből ($\overline{C}$ a C_1 merőleges vetülete az y-tengelyen, $\overline{C}(0;12)$, O az origó) kivonjuk az OB_1A és az $AC_1\overline{C}$ derékszögű háromszögek területének összegét.

$$T_1=\frac{8+4}{2}\cdot 12-\frac{8\cdot 6}{2}-\frac{4\cdot 6}{2}=36 \text{ területegység.}$$

Az AB_2C_2 háromszög területét megkapjuk, ha a B_2OA háromszög területéhez hozzáadjuk az ODC_2A trapéz területét (D a C_2 pont vetülete az x tengelyen, $D(20;0)$), és az összegből kivonjuk a B_2C_2D háromszög területét.

$$T_2=\frac{8\cdot 6}{2}+\frac{6+12}{2}\cdot 20-\frac{28\cdot 12}{2}=36 \text{ területegység.}$$

3. *a)* $x\neq 2$ és $x\neq -2$. $\frac{x^4-16}{x^2-4}=x^2+4>0$ minden megengedett x-re, tehát $x\in\mathbf{R}\setminus\{-2;2\}$.

b) Ha $x>2$, akkor $x+2-(x-2)-x>0$, $x<4$, tehát $2<x<4$;
ha $-2\le x\le 2$, akkor $x+2+x-2-x>0$, $x>0$, tehát $0<x\le 2$;
ha $x<-2$, akkor $-x-2+x-2-x>0$, $x<-4$, tehát $x<-4$.

A kifejezés akkor pozitív, ha $x<-4$ vagy $0<x<4$. (A kifejezés grafikonjának elkészítésével grafikusan is megoldható a feladat.)

c) $\sin 2x>0$ és $\log_2\sin 2x>-1$, tehát $\sin 2x>\frac{1}{2}$. (Az $x\mapsto\log_2 x$ függvény szigorúan monoton növekedő!)

$$\frac{\pi}{6}+2k\pi<2x<\frac{5\pi}{6}+2k\pi,\qquad \frac{\pi}{12}+k\pi<x<\frac{5\pi}{12}+k\pi,\qquad x\in\mathbf{Z}.$$

4. *a)* Az (a_n) sorozat első $(n-1)$ tagjának összege $S_{n-1}=2(n-1)^2+3(n-1)$. Mivel $a_n=S_n-S_{n-1}$, azért

$$a_n=2n^2+3n-\big(2(n-1)^2+3(n-1)\big)=4n+1.$$

Így $a_{n-1}=4(n-1)+1$ és $a_n-a_{n-1}=4$, azaz (a_n) valóban számtani sorozat. A (b_n) sorozat is számtani, hiszen

$$b_n-b_{n-1}=4n-1-(4(n-1)-1)=4.$$

b) A (b_n) sorozat első tagja $b_1=3$, így első n tagjának összege

$$S'_n=\frac{3+4n-1}{2}\cdot n,\qquad S'_n=2n^2+n.$$

c) $c_n=(4n+1)+(4n-1)=8n$; a c_n sorozat első n tagjának összege S''_n.

$$S''_n=8(1+2+\cdots+n)=8\cdot\frac{n(n+1)}{2},\qquad S''_n=4n^2+4n.$$

5. Az egyenletnek nincs értelme, ha $\sin 2x=-1$, így $2x\neq\frac{3\pi}{2}+2k\pi$, $x\neq\frac{3\pi}{4}+k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$.

Mivel $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)$ és $1+\sin 2x=\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cdot\cos x=(\cos x+\sin x)^2$, azért a törtet egyszerűsíthetjük $(\cos x+\sin x)$-szel; szorozzuk meg az egyenlet mindkét oldalát $(\cos x+\sin x)$-szel, majd nullára rendezés után alakítsunk szorzattá.

$$(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)-(\cos x-\sin x)=0, (\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x-1)=0.$$

Ha $\cos x-\sin x=0$, akkor $\operatorname{tg} x=1$, $x_n=\frac{\pi}{4}+n\pi$, $n\in\mathbf{Z}$, és ezek az adott egyenlet megoldásai,
ha $\cos x+\sin x=1$, akkor az egyenlet mindkét oldalát elosztva $\sqrt{2}$-vel a $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$ egyenlethez jutunk. Tehát a további megoldások: $x_k=2k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$ és $x_m=\frac{\pi}{2}+2m\pi$, $m\in\mathbf{Z}$.

6. Mivel a feladat csak szöget kérdez, vehetünk az adott alakzathoz hasonlót. Így a szóban forgó oldal két része legyen $\sqrt{3}$ és 1 egység. A magasság a 75°-os szöget két részre osztja, α és $75^\circ - \alpha$; a $\sqrt{3}$-résznél legyen az α szög. Ekkor a szóban forgó magasság egyrészt $\dfrac{\sqrt{3}}{\operatorname{tg}\alpha}$, másrészt $\dfrac{1}{\operatorname{tg}(75^\circ - \alpha)}$, tehát $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3}\operatorname{tg}(75^\circ - \alpha)$. Legyen $\operatorname{tg}\alpha = t$; $\operatorname{tg} 75^\circ = 2 + \sqrt{3}$.

$$t = \sqrt{3} \cdot \frac{2+\sqrt{3}-t}{1+(2+\sqrt{3})t}, \qquad (2+\sqrt{3})t^2 + (1+\sqrt{3})t - (2\sqrt{3}+3) = 0.$$

Az egyenlet diszkriminánsa $D = \cdots = (5+3\sqrt{3})^2$. Most $t > 0$, ezért $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{-1-\sqrt{3}+(5+3\sqrt{3})}{2(2+\sqrt{3})}$, $\operatorname{tg}\alpha = 1$, $\alpha = 45^\circ$, $75^\circ - \alpha = 30^\circ$. A magasság a 75°-os szöget 45° és 30°-ra osztja.

(Más módon is számolhatunk. Hogyan?)

7. Az egyenlet gyökei pontosan akkor valósak, ha a diszkriminánsa nemnegatív.

$$D = 16p^2 - 4(2p^2+3p-1) = 8(p-1)\left(p - \frac{1}{2}\right) \ge 0, \qquad \text{ha } p \le \frac{1}{2} \text{ vagy } p \ge 1.$$

a) A két gyök akkor egyenlő, ha a diszkrimináns nulla. $D = 0$, ha $p = \dfrac{1}{2}$ vagy $p = 1$, az első esetben $x^2+2x+1=0$, $x_1 = x_2 = -1$, a második esetben $p = 1$, $x^2+4x+4=0$, $x_1 = x_2 = -2$.

b) $D \ge 0$ és $x_1x_2 = 1$, $2p^2+3p-1 = 1$, $p = -2$ vagy $p = \dfrac{1}{2}$, $x^2 - 8x + 1 = 0$, $x_1 = 4+\sqrt{15}$, $x_2 = 4-\sqrt{15}$; $x^2+2x+1=0$, $x_1 = x_2 = -1$.

c) $x_2 = 2x_1$; $x_1 + x_2 = -4p$, $x_1x_2 = 2p^2+3p-1$, innen $14p^2 - 27p + 9 = 0$, $p = \dfrac{3}{2}$ vagy $p = \dfrac{3}{7}$.
Ha $p = \dfrac{3}{2}$, akkor $x^2+6x+8=0$, $x_1 = -2$, $x_2 = -4$,
ha $p = \dfrac{3}{7}$, akkor $x^2 + \dfrac{12}{7}x + \dfrac{32}{7} = 0$, $x_1 = -\dfrac{4}{7}$, $x_2 = -\dfrac{8}{7}$.

d) A $p \mapsto 2p^2+3p-1$ függvény minimumát keressük, ha $p \le \dfrac{1}{2}$ vagy $p \ge 1$. $2p^2+3p-1 \equiv 2\left(p+\dfrac{3}{4}\right)^2 - \dfrac{17}{8}$.
Mivel $p = -\dfrac{2}{3} < \dfrac{1}{2}$, azért a gyökök szorzata akkor minimális, ha $p = -\dfrac{3}{4}$, és ekkor $x_1x_2 = -\dfrac{17}{8}$.

8. A vágások száma legyen k, illetve n, $k \le n$. A „jó” darabok száma $(k-1)(n-1)$, a „rossz” darabok száma $2(k+1)+2(n-1) = 2k+2n$. (A rossz darabok száma más módokon is kifejezhető: $2(k+1)+2(n+1)-4$ vagy $(k+1)(n+1)-(k-1)(n-1)$.)

A feltétel szerint:

$$\begin{gathered}(k-1)(n-1) = 4(k+n),\\ kn - 5k - 5n + 1 = 0,\\ k(n-5) - 5(n-5) = 25 - 1,\\ (k-5)(n-5) = 24.\end{gathered}$$

24 a következő egész számok szorzataként állítható elő: $1\cdot 24$; $2\cdot 12$; $3\cdot 8$; $4\cdot 6$ és $(-24)\cdot(-1)$; $(-12)\cdot(-2)$; $(-8)\cdot(-3)$; $(-6)\cdot(-4)$. $k-5 \le n-5$ miatt csak ezek az esetek fordulhatnak elő. Mivel k és n pozitív egész szám, azért $k-5$ nem lehet sem -24, sem -12, sem -8, sem -6, mert akkor k nem lenne pozitív.
$k-5 = 1$, $k = 6$, $n-5 = 24$, $n = 9$, és ekkor 140 „jó”, 70 „rossz” sütemény keletkezik, az adagok száma 70; vagy
$k-5 = 2$, $k = 7$, $n-5 = 12$, $n = 7$, és ekkor 96 „jó”, 48 „rossz” sütemény keletkezik, az adagok száma 48; vagy
$k-5 = 3$, $k = 8$, $n-5 = 8$, $n = 13$, és ekkor 84 „jó”, 42 „rossz” sütemény keletkezik, az adagok száma 42; vagy
$k-5 = 4$, $k = 9$, $n-5 = 6$, $n = 11$, és ekkor 80 „jó”, 40 „rossz” sütemény keletkezik, az adagok száma 40.

Rábai Imre