Molnár József vezető szakfelügyelő emlékére

1. Igazolja, hogy az (a_n) $(n \in \mathbf{N}^+)$ sorozat pontosan akkor (akkor és csak akkor) számtani sorozat, ha
a) $a_n = An + B$, A, $B \in \mathbf{R}$; illetve
b) a sorozat első n tagjának összege $S_n = Kn^2 + Ln$, K, $L \in \mathbf{R}$, $K \neq 0$.

2. Az $ABCD$ konvex négyszögben $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, $AC = e$, $BD = f$.
Igazolja, hogy a négyszög pontosan akkor (akkor és csak akkor) trapéz ($AB \parallel CD$), ha

$$e^2 + f^2 = b^2 + d^2 + 2ac.$$

3. Az ABC háromszögben $BAC\sphericalangle = \alpha$, $0^\circ < \alpha < 60^\circ$.
A háromszög oldalaira kifelé állítsuk az ABC_1, BCA_1, ACB_1 egyenlő szárú háromszögeket, amelyek alapja a háromszög megfelelő oldala, és az alapon fekvő szögek α-val egyenlők.
Igazolja, hogy az ABC és az A_1BC háromszögek területének összege egyenlő az ABC_1 és az AB_1C háromszögek területének összegével!

4. Igazolja, hogy

$$2 + 7 + 14 + \cdots + (n^2 + 2n - 1) = \frac{n}{6}(2n^2 + 9n + 1).$$

$$\left(\sum_{k=1}^{n}(k^2 + 2k - 1) = \frac{n}{6}(2n^2 + 9n + 1)\right)$$

Rábai Imre