A 2000. évi XI. magyar–izraeli matematikaverseny feladata volt a következő:

1. *Adott a síkon a C kör (a középpontja nélkül) és a P pont. Megszerkeszthető-e csak vonalzóval a C kör középpontját a P-vel összekötő egyenes?*

2. *Adott a síkon a C_1 és a C_2 kör (a középpontjaik nélkül). Szerkesszük meg a középpontjaikon átmenő egyenest csak vonalzóval, ha*

i)a két kör metszi egymást;

ii)a két kör érinti egymást, és az érintési pont, T meg van jelölve;

iii)ha nincs közös pontjuk.

A feladatot úgy kaptuk meg, hogy a 2. *iii)* részre nem volt ismert, hogy elvégezhető-e a szerkesztés. A későbbiekben megvizsgáljuk, mit mondhatunk az egyes esetekben.

1. Először is vegyük észre, hogy itt az a kérdés, megszerkeszthető-e a C kör középpontja. Valóban, egyrészt ha megszerkeszthető, akkor P-vel összekötve, a kívánt egyenest kapjuk meg. Másrészt, ha két tetszőleges pontot, P_1-et és P_2-t véve megszerkesztjük a kérdezett egyeneseket (ha szerkeszthetők), akkor ezek metszéspontja a kör középpontját adja meg (kivéve, ha OP_1 egyenesén P_2 is rajta van, de először OP_1 egyenesét megszerkesztve felvehetjük P_2-t rajta kívül). Átfogalmazzuk tehát a kérdést:

1.' Megszerkeszthető-e csak vonalzóval a C kör középpontja?

Megmutatjuk, hogy ez nem lehetséges. A bizonyítás indirekt: tegyük fel, hogy szerkesztési lépések egy sorozatával megkaptuk a középpontot, O-t. A bizonyítás alapgondolata nagyon szép: vetítsük a kört egy pontból egy másik S_1 síkra úgy, hogy kör maradjon, a sík egyenesei egyenesek maradjanak, de a kör O középpontja ne kerüljön az új kör O_1 középpontjába. A vetítést a feltételezett szerkesztés lépéseire alkalmazva az új síkon ugyanannak a lépéssorozatnak az O_1 középpontot kellene adnia, de a lépések nyomán a C körvonal középpontjának O^* vetítettjét kapjuk, ami ellentmondás, mert ez a pont nem középpontja a C_1-nek. Célunk tehát az, hogy egy ilyen vetítést találjunk.

Lépjünk ki ezért az S síkból a térbe, vegyünk fel egy P pontot a síkon kívül, és tekintsük a P és a C körvonal által meghatározott kúpot. Az a G gömb, amelynek C az egyik főköre, metszi a kúpot, ha P a G-n kívül van (*1. ábra*). Belátjuk, hogy a metszet kör, vagy ami ezzel ekvivalens, hogy a metszet pontjai egy síkban vannak. Valóban, ha Q_1 és Q_2 a C két pontja, a PQ_1 és PQ_2 egyenesek másodszor R_1-ben és R_2-ben metszik a G gömböt, akkor az R_1 és R_2 által meghatározott egyenes párhuzamos egy adott állású síkkal. Ennek belátásához tekintsük azt a G_1 gömböt, ami átmegy C-n és a P ponton; e gömb P-beli érintősíkja, S_2 megfelelő lesz. Messük el ugyanis az egész elrendezést a $Q_1Q_2R_2R_1$ négyszög síkjával: állításunk bizonyítása a kerületi szögek tétele alapján a *2. ábráról* leolvasható.

Legyen a metszet síkja (az S_2-vel párhuzamos) S_1 sík; azt állítjuk, hogy ha P merőleges vetülete az eredeti S síkon nem C középpontja, vagyis a P csúcsú C alapú kúp nem egyenes kúp, akkor a P pontból az S_1 síkra való vetítés megfelel.

Valóban, az S és az S_1 sík, C és C_1 síkja nem párhuzamos, így O (a C középpontja) képe nem lesz középpont; C képe a bizonyítottak szerint kör, az pedig nyilvánvaló, hogy a vetítés során minden egyenes képe egyenes. Tehát **1.'**-re valóban nemmel válaszolhatunk.

2. Az első két részfeladat megoldásához két ismert alapszerkesztést használunk fel.

2

3. ábra

a) Ha ismert egy AB szakasszal párhuzamos e egyenes, akkor csak vonalzóval meg tudjuk szerkeszteni az AB szakasz F felezőpontját.

4. ábra

b) Ha adott az AB szakasz F felezőpontja, akkor tetszőleges Q ponton át csak vonalzóval meg tudjuk szerkeszteni az AB-vel párhuzamos, Q ponton átmenő egyenest.

a) A P segédpontot felvéve a létrejövő ABQ_1Q_2 trapézban PM átmegy az AB felezőpontján.

b) A P segédpontot felvéve az M pont PF és BQ metszéspontjaként adódik. Ezután az AM és PB metszéspontját (Q^*) a Q-val összekötő egyenes párhuzamos lesz AB-vel.

Az első szerkesztés helyessége a párhuzamos szelők tételéből, a másodiké pedig annak megfordításából közvetlenül adódik.

Térjünk rá ezek után a 2. feladat első két szerkesztésére.

a) szerint mindkét esetben elegendő az egyik körbe egy párhuzamos húrpárt rajzolnunk. Ekkor ugyanis meg tudjuk felezni őket, és az F_1F_2 egyenes átmegy a kör középpontján (*5. ábra*).

Ezt a lépést egy újabb, az előzővel nem párhuzamos húrpárra megismételve a kör középpontja is megszerkeszthető, a centrálist tehát a körök középpontjainak megszerkesztésével kapjuk.

i) A C_1 körön a P_1, P_2 segédpontokat fölvéve és összekötve őket a körök metszéspontjaival, a kerületi szögek tétele szerint a $\widehat{Q_1R_2}$ és az $\widehat{R_1Q_2}$ ívek egyenlők, így a végpontjaikat összekötő húrok, Q_1Q_2 és R_1R_2 párhuzamosak (*6. ábra*).

ii) Mivel T a két érintkező kör belső hasonlósági pontja, a P_1, P_2 segédpontokat fölvéve P_1P_2 párhuzamos Q_1Q_2-vel (*7. ábra*).

a) szerint így meg tudjuk felezni a Q_1Q_2 szakaszt, és ezután b) szerint a C_2 kör tetszőleges P pontján át meg tudjuk rajzolni a Q_1Q_2-vel párhuzamos húrt.

Mielőtt rátérnénk *iii)* vizsgálatára, megfigyelhetjük, hogy az *i)* és *ii)* esetben nemcsak a centrálist kapjuk meg, hanem a középpontokat is. Az *i)* részre majd mutatunk egy olyan szerkesztést is, amely közvetlenül a centrálist adja meg, a középpontokat nem. Az *iii)* esetben pedig megmutatjuk, hogy az eddigi típusú szerkesztések nem működnek, ti. C_1 és C_2 középpontja általában nem szerkeszthető.

iii) A pontos állítás, amit bizonyítunk, a következő:

Állítás. Ha a C_1 és C_2 körvonalaknak nincs közös pontja, továbbá nem koncentrikusak, akkor középpontjaik csak vonalzóval nem szerkeszthetők.

Bizonyítás. Az első bizonyításhoz hasonlóan most is azt mutatjuk meg, hogy van olyan P pont és S_1 sík a térben, hogy a P-ből a körök S síkját S_1-re vetítve mindkét kör képe kör marad, de a vetítés során a középpontok képe nem középpont. A *8. ábra* azt a síkmetszetet mutatja, amelyben a P ponton és a C_1, C_2 körök centrálisán átmenő sík metszi az elrendezést.

Tekintsük C_1 és C_2 hatványvonalát, messe ezt a centrális a Q pontban, vegyük fel a P pontot C_1 és C_2 síkján kívül úgy, hogy a QP szakasz hossza egyenlő legyen a Q pontból a körökhöz húzható érintő szakasz hosszával; továbbá P merőleges vetülete a centrálison legyen. Mivel C_1 és C_2 nem koncentrikusak, így a hatványvonaluk létezik; másrészt Q-ból C_1-hez és C_2-höz is húzható érintő, mert a hatványvonal nem metszi (vagy érinti) a köröket az adott feltételek mellett. Tekintsük a P és a C_1 által meghatározott G_1, továbbá a P és a C_2 által meghatározott G_2 gömböt. QP egyenese mindkét gömböt érinti (hiszen a Q-ból a G_1-hez, illetve G_2-höz húzott érintők mind egyenlő hosszúak), a két gömb P-beli érintősíkja így azonos (mivel QP-vel és a hatványegyenessel is párhuzamos), tehát a két gömb P-ben érinti egymást. Vegyünk fel az itteni E érintősíkkal párhuzamos S_1 síkot, amely nem megy át P-n.

P-ből erre az S_1 síkra vetítve (ami S-sel nem párhuzamos, mert C_1 és C_2 nem koncentrikusak) C_1 és C_2 képe kör, az egyenesek képe egyenes, de C_1 és C_2 középpontja nem megy át a megfelelő középpontokba, így **1.**-hez hasonlóan ellentmondáshoz jutottunk.

Mindebből még nem következik, hogy a centrális nem szerkeszthető. A középpontok viszont még akkor sem szerkeszthetőek, ha még a centrális is meg van adva, ez adódik a fenti bizonyításból. Ez azért fontos, mert ellenkező esetben be lehetne bizonyítani, hogy ha körök nem metszik egymást, akkor nem szerkeszthető meg a centrális. Valóban, ha a centrális ismeretében már meg lehetne szerkeszteni a középpontokat, akkor abból a körök középpontjára adódna szerkesztési eljárás.

A fenti eredmény tehát negatív: nem vezet ellentmondásra az a feltevés, hogy két nem metsző kör centrálisa csak vonalzóval megszerkeszthető. Ennél többet a fentiek alapján nem állíthatunk, az *iii)* probléma továbbra is nyitott.

Befejezésül egy további speciális eredményt bizonyítunk:

Állítás. Ha C_1 és C_2 koncentrikus körök, akkor szerkeszthető a közös középpont.

Bizonyítás. Azt mutatjuk meg, hogy koncentrikus körökbe ismét rajzolhatunk párhuzamos húrokat csak vonalzóval (*9. ábra*), az így adódó szimmetrikus trapéz felhasználásával pedig a közös középponton átmenő egyenest rajzolhatunk.

Ha P a körök külső pontja, akkor a P-nek a körökre vonatkozó *polárisai* [1]Egyenes és pont körre vonatkozó kölcsönösen egyértelmű megfeleltetéséről, a *polaritásról* ld. pl.: *Havalampijev:* Pólus és poláris a körben c. cikkét a KöMaL 1987/1. számában., p_1 és p_2 párhuzamosak lesznek (*10. ábra*).

Egy P pont adott körre vonatkozó p polárisát pedig megszerkeszthetjük csak vonalzóval, ha felhasználjuk, hogy a P-n átmenő tetszőleges egyenes, amelyik a kört két pontban (Q_1 és Q_2) metszi, a p polárist olyan P^* pontban metszi, amelyre a $PQ_2P^*Q_1$ ún. *harmonikus pontnégyest* alkot, tehát amelyre $\dfrac{Q_2P}{PQ_1} = \dfrac{Q_2P^*}{P^*Q_1}$ (*11. ábra*).

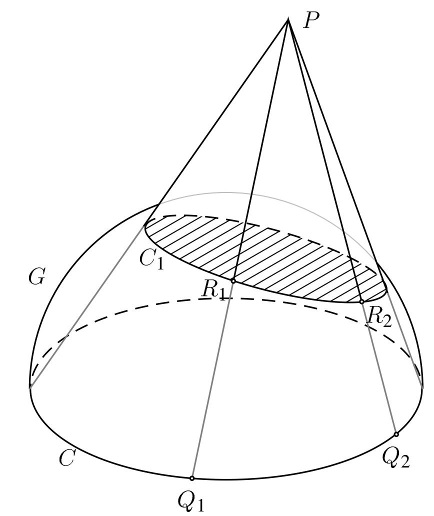
A P pontnak a Q_1, Q_2 pontokra vonatkozó *harmonikus társát* pedig megszerkeszthetjük csak vonalzóval (*12. ábra*). A szerkesztés a 2/a) eljárás kiterjesztése, a „teljes négyoldal” tulajdonságait használja fel.

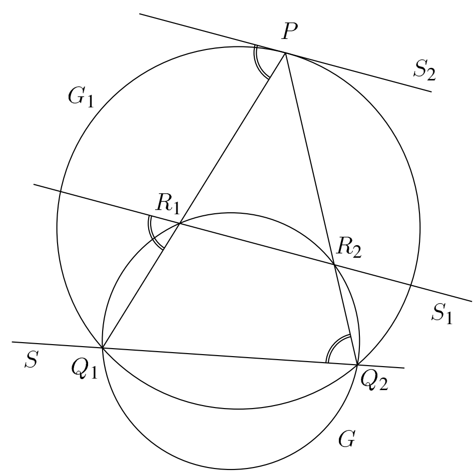
Így két szelő felhasználásával két pontot kapunk a poláris on.

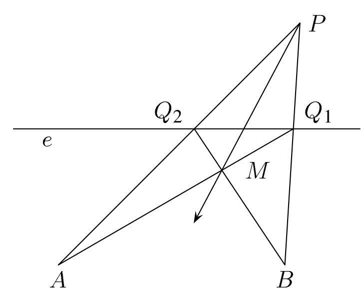
Némileg hasonló az új megoldás az *i)* feladatra: elég lenne a két kör metszéspontjaiban érintőket szerkeszteni, ezek metszéspontjai kiadják a centrálist. Ehhez a projektív geometria ad segítséget: a *Pappos–Pascal* tétel. Eszerint ha adott egy körbe írt hatszög, akkor az A_iA_{i+1} és $A_{i+3}A_{i+4}$ egyenesek metszéspontjai ($i = 1, 2, 3$) $A_{j+6} = A_j$ egy egyenesen vannak. A hatszög itt akár önmagát metsző is lehet: a csúcsok számozása határozza meg az egyenespárokat. A tétel akkor is igaz, ha egy egyenest meghatározó két pont egybeesik a körön: összekötő egyenesük ekkor az adott pontba húzott érintő. Éppen ezt használhatjuk egy kör adott A pontjába húzott érintő megszerkesztésekor. Legyen $A_0 \equiv A_1 \equiv A$, és vegyük fel az A_2, A_3, A_4, A_5 pontokat a körön tetszőlegesen. Szerkesszük meg az $A_2A_3 \cap A_5A_0$, $A_4A_5 \cap A_1A_2$ metszéspontokat; a tétel szerint ezek egy e egyenesen vannak. Ez A_3A_4-et B-ben metszi; AB a keresett érintő (*13. ábra*). Ez utóbbi két megoldás mutatja, hogy milyen hasznos segédeszköz lehet a projektív geometria bizonyos feladatok megoldásánál.

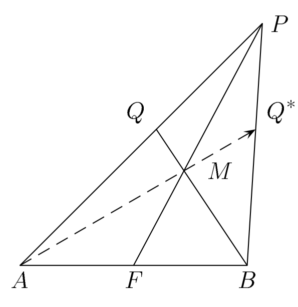
Végül az érdeklődőknek ajánljuk *Szőkefalvi Nagy Gyula:* A geometriai szerkesztések elmélete című könyvét. A bizonyítások egy része innen származik, és itt található az **1.** feladatra, illetve a **2.** *iii)* részre koordináta-geometriát felhasználó bizonyítás is.

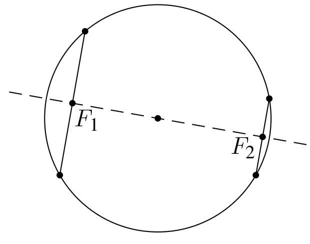
Gyenes Zoltán

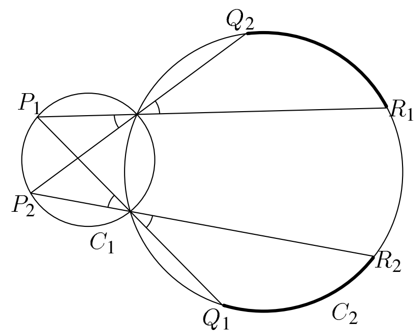

P
G
C_1
R_1
R_2
C
Q_1
Q_2


P
S_2
G_1
R_1
R_2
S_1
S
Q_1
Q_2
G

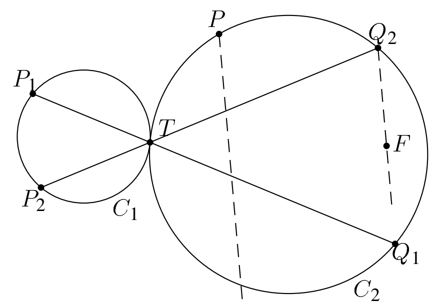

P
Q_2
Q_1
e
M
A
B


P
Q
Q^*
M
A
F
B

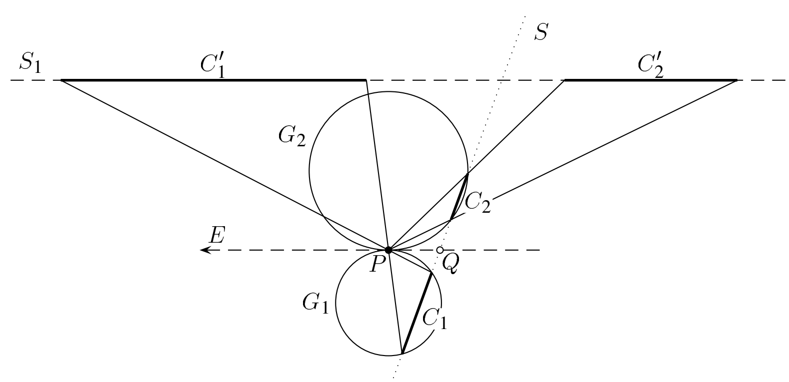

F_1
F_2



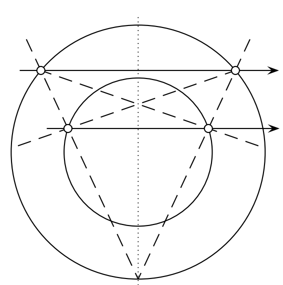
Q_2
P_1
R_1
P_2
C_1
R_2
Q_1
C_2

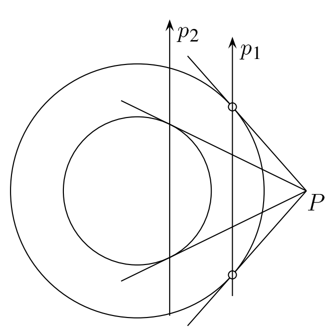


P
Q_2
P_1
T
F
P_2
C_1
Q_1
C_2

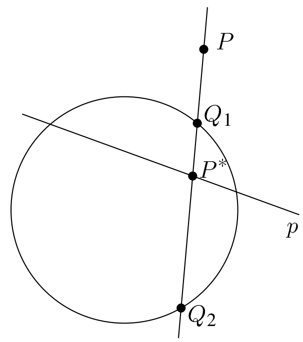


S
S_1
C_1'
C_2'
G_2
C_2
E
P
Q
G_1
C_1

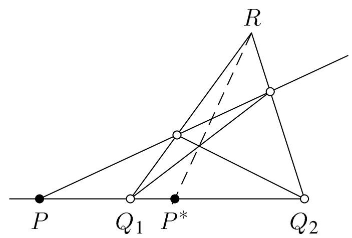




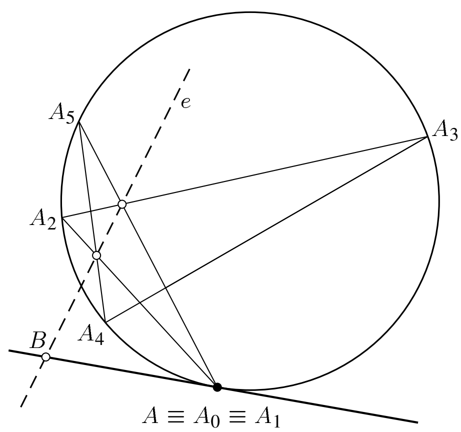
p_2
p_1
P



P
Q_1
P^*
p
Q_2



R
P
Q_1
P^*
Q_2



A_5
e
A_3
A_2
A_4
B
$A \equiv A_0 \equiv A_1$