1. *Az $A(0,\ 0)$, $B(n,\ 0)$, $C(n,\ n)$ és $D(0,\ n)$ pontok által meghatározott négyzet határán és belsejében elhelyezkedő rácspontokat pirosra vagy zöldre színezzük úgy, hogy a négyzetbe eső valamennyi egységoldalú rácsnégyzetnek pontosan két csúcsa legyen piros. Hányféleképpen tehetjük ezt meg?*

Megoldás. A szóban forgó rácspontok $n+1$ sorban és $n+1$ oszlopban helyezkednek el. Nevezetesen, az i-edik sor $(0 \le i \le n)$ azokat a rácspontokat tartalmazza, amelyeknek a második koordinátája i. Hasonlóképpen, az i-edik oszlop azokból a rácspontokból áll, amelyek első koordinátája i. Két rácspontot szomszédosnak fogunk hívni akkor, ha ugyanabban a sorban vagy oszlopban egymás mellett helyezkednek el. Az $(i,\ j)$ pont szomszédai tehát az $(i-1,\ j)$, $(i+1,\ j)$, $(i,\ j-1)$ és $(i,\ j+1)$ pontok, amennyiben ezek is az $ABCD$ négyzet pontjai.

Nyilván jó színezését kapjuk a pontoknak akkor, ha minden sorban felváltva színezzük pirosra és zöldre az egymást követő pontokat. Az egyes sorokat ekkor egymástól függetlenül kétféleképpen színezhetjük, ezért az ilyen színezéseknek a száma 2^{n+1}. Ugyanilyen megfontolásból lesz jó az a 2^{n+1} színezés is, ahol az egyes oszlopokban követik egymást felváltva a piros és zöld pontok. Mivel a pontokat kétféleképpen lehet úgy kiszínezni, hogy sem a sorokban, sem az oszlopokban nincs két szomszédos azonos színű pont, ezért így összesen

$$2^{n+1} + 2^{n+1} - 2 = 2^{n+2} - 2$$

jó színezést találtunk.

Megmutatjuk, hogy a fentieken kívül nincs más jó színezés. Ehhez tegyük fel először azt, hogy a pontokat megszíneztük a kívánt módon, és valamelyik oszlopban – mondjuk az i-edikben – van egymás mellett két azonos színű szomszédos pont. Legyenek ezek $(i,\ j)$ és $(i,\ j+1)$. Ekkor az $(i-1)$-edik és az $(i+1)$-edik oszlopban is található egymás mellett két azonos színű pont. Nevezetesen az $(i-1,\ j)$, $(i-1,\ j+1)$, $(i+1,\ j)$, $(i+1,\ j+1)$ pontok mind azonos színűek, és egyben az $(i,\ j)$, $(i,\ j+1)$ pontoktól eltérő színűek kell, hogy legyenek. Indukcióval könnyen ellenőrizhető ezután, hogy az $(i-k,\ j)$, $(i-k,\ j+1)$, $(i+k,\ j)$, $(i+k,\ j+1)$ pontok színe az $(i,\ j)$, $(i,\ j+1)$ pontokéval megegyező, ha k páros, illetve azokétól eltérő, ha k páratlan.

Tegyük fel most még azt is, hogy valamelyik sorban – mondjuk a j'-edikben – is van egymás mellett két azonos színű pont: $(i',\ j')$ és $(i'+1,\ j')$. Az előbbihez hasonló gondolatmenettel (vagy egyszerűbben: szimmetria okokra hivatkozva) megállapíthatjuk, hogy minden k-ra az $(i',\ j'-k)$, $(i'+1,\ j'-k)$, $(i',\ j'+k)$, $(i'+1,\ j'+k)$ pontok azonos színűek.

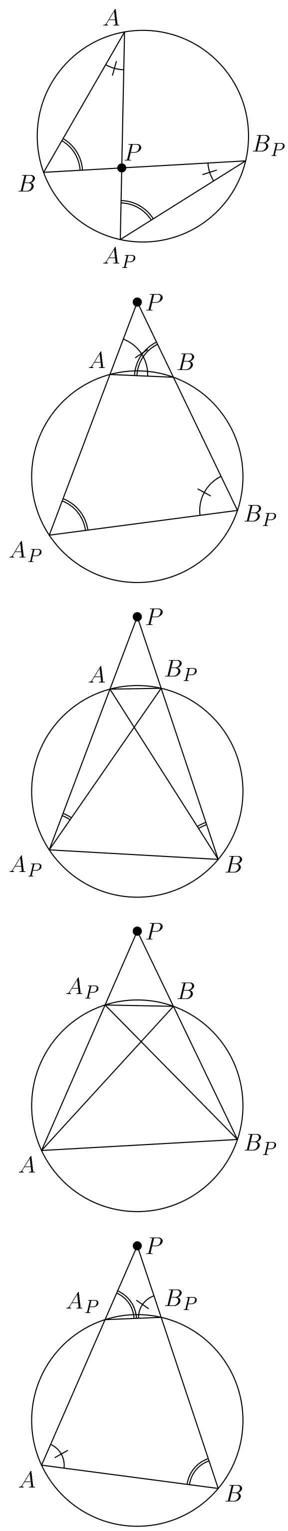
A fentiek szerint az $(i',\ j)$ pont színe meg kell, hogy egyezzen mind az $(i',\ j+1)$, mind az $(i'+1,\ j)$ pont színével. Ez azonban egy jó színezésben nem történhet meg, hiszen a felsorolt három pont éppen egy egységoldalú rácsnégyzet három csúcsa. Ez az ellentmondás igazolja azon állításunkat, miszerint minden jó színezésben vagy az oszlopokban, vagy a sorokban váltakozó színű pontok követik egymást. A kérdéses színezések száma tehát $2^{n+2}-2$.

2. *Legyen ABC szabályostól különböző háromszög, P pedig a síknak a háromszög csúcsaitól különböző pontja. Jelöljék A_P, B_P és C_P rendre az AP, BP és CP egyeneseknek az ABC háromszög köré írt körrel vett második metszéspontjait. Mutassuk meg, hogy a síknak pontosan két olyan P és Q pontja van, hogy az $A_PB_PC_P$ és $A_QB_QC_Q$ háromszögek szabályosak, továbbá, hogy a PQ egyenes áthalad az ABC háromszög köré írt kör középpontján.*

Az első két megoldás a körre vonatkozó inverzió fogalmára támaszkodik, ezért röviden összefoglaljuk ennek a transzformációnak legfontosabb tulajdonságait. Ha adott a síkon egy O középpontú, r sugarú k kör, akkor a k körre vonatkozó inverzió a sík O-tól különböző pontjainak az a leképezése, amely tetszőleges P ponthoz az OP félegyenes azon P' pontját rendeli hozzá, amelyre $OP \cdot OP' = r^2$. Ha az A pont (vagy alakzat) képe B, akkor a B ponté (alakzaté) éppen A. A leképezés tehát egy-egyértelmű, a k pontjait helyben hagyja, k-n belüli pontokat pedig k-n kívüli pontokba visz, és fordítva. Ha egy kör az O pontot elkerüli, akkor a körvonal képe egy, az O-t szintén elkerülő körvonal, egy O-n áthaladó k_1 körvonal képe pedig egy O-ra nem illeszkedő egyenes: a k és k_1 körök hatványvonala. Fontos tulajdonsága az inverziónak a szögtartás: ha k_1 és k_2 egy-egy körvonal (elfajuló esetben O-ra nem illeszkedő egyenes), akkor a k_1' és k_2' körök ugyanolyan szög alatt metszik egymást, mint a k_1 és k_2 körök. (Két egymást metsző kör által bezárt szög alatt közös pontjukban húzott érintőik hajlásszögét értjük.) Speciálisan, ha a k_1 kör k-t merőlegesen metszi, akkor $k' = k$ miatt k_1' is merőlegesen metszi k-t, méghozzá ugyanabban a két pontban, ezért $k_1' = k_1$.

Ezek után lássuk először a legkevesebb diszkussziót igénylő megoldást.

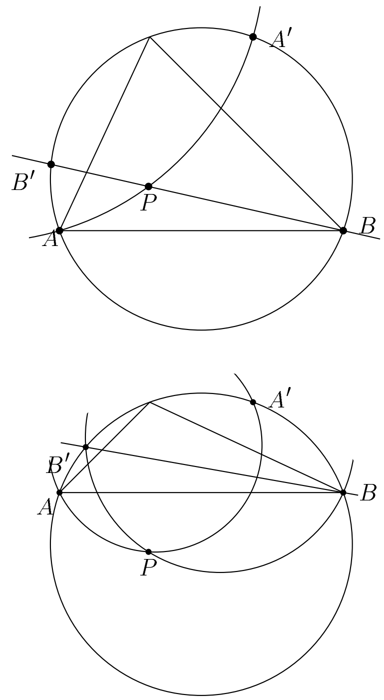
I. Megoldás. Ha P az ABC háromszög köré írható k körön van, akkor $A_P = B_P = C_P = P$, és így az $A_PB_PC_P$ háromszögről nem beszélhetünk. Az egyazon húrhoz tartozó kerületi szögek egyenlőségéről szóló tételre hivatkozva az *1. ábráról* leolvasható, hogy az A_PB_PP háromszög hasonló a BAP háromszöghöz, függetlenül attól, hogy P a k körön belül, vagy azon kívül helyezkedik-e el. Ezért $\dfrac{A_PB_P}{B_PP} = \dfrac{BA}{AP}$, és hasonló módon $\dfrac{C_PB_P}{B_PP} = \dfrac{BC}{CP}$.



1. ábra

Az $A_PB_P = B_PC_P$ feltétel tehát ekvivalens az $\dfrac{AP}{CP} = \dfrac{AB}{CB}$ feltétellel, vagyis azzal, hogy P az A és C pontokhoz, valamint az $\dfrac{AB}{CB}$ arányhoz tartozó Apollóniusz-körnek k-ra nem illeszkedő pontja. (Abban a speciális esetben, amikor $AB = CB$, ez az Apollóniusz-kör elfajuló, és az AC szakasz felező merőlegesével egyezik meg.) Ugyanígy kapjuk azt is, hogy az $A_PB_P = A_PC_P$ feltétel ekvivalens azzal, hogy P a B és C pontokhoz, valamint az $\dfrac{BA}{CA}$ arányhoz tartozó Apollóniusz-körnek k-ra nem illeszkedő pontja. Az $A_PB_PC_P$ háromszög tehát pontosan akkor szabályos, ha P az említett két Apollóniusz-kör (k-ra nem illeszkedő) közös pontja.

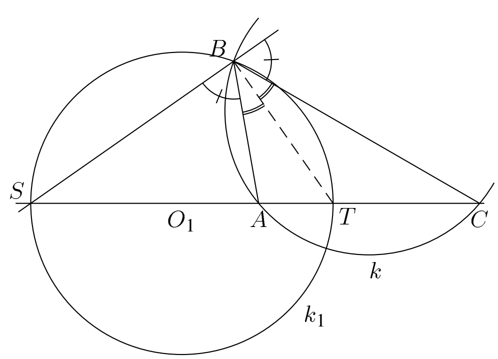
Az AC egyenes elválasztja az első Apollóniusz-kör k-val való, B-től különböző B' metszéspontját a B ponttól. Ugyanígy, a BC egyenes elválasztja a második Apollóniusz-kör k-val való, A-tól különböző A' metszéspontját az A ponttól. Következésképpen az A, B, A', B' pontok a k körön ilyen sorrendben helyezkednek el (*2. ábra*), és ezért a két Apollóniusz-kör mind a k körön belül, mind azon kívül egy-egy pontban metszi egymást. Pontosabban, a k-n kívüli metszéspont nem létezik abban az esetben, ha mind a két Apollóniusz-kör elfajuló, ez azonban pontosan akkor következik be, ha az ABC háromszög szabályos. Ezzel a feladat első állítását beláttuk.



2. ábra

A második állítás bizonyítása azon az észrevételen alapul, hogy az említett Apollóniusz-körök a k kört merőlegesen metszik. Ekkor ugyanis a szögtartás miatt a k-ra vonatkozó inverzió mind a két Apollóniusz-kört saját magába viszi, és ezért a körök metszéspontjainak képe az inverzió során ugyanez a két pont. Mivel a k körön belüli pontok a k-n kívüli pontokba transzformálódnak, ez csak úgy lehetséges, ha az inverzió P-t és Q-t felcseréli. A P és Q pontok tehát egymásnak a k körre vonatkozó inverz képei, ennek megfelelően a PQ egyenes valóban áthalad a k kör O középpontján.

Szimmetria okokból elegendő azt megmutatni, hogy az első Apollóniusz-kör (jelöljük ezt k_1-gyel) merőlegesen metszi k-t. Ez nyilvánvaló, ha $AB = CB$, egyébként pedig feltehetjük, hogy $\alpha = BAC\sphericalangle > BCA\sphericalangle = \gamma$. Legyen a B-ből induló belső szögfelező talppontja T, a külsőé S. A szögfelező-tétel értelmében ST éppen a k_1 körnek az AC egyenesre eső átmérője, amely tartalmazza az A pontot is (*3. ábra*).



3. ábra

Ezért $SBT\sphericalangle = \dfrac{\pi}{2}$. Továbbá

$$TBO\sphericalangle = \frac{\beta}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{\pi}{2} - \left(\pi - \left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right)\right) = \frac{\pi}{2} - BTS\sphericalangle = BST\sphericalangle = SBO_1\sphericalangle,$$

ahol O_1 a k_1 kör középpontja. Ezért

$$O_1BO\sphericalangle = SBT\sphericalangle + TBO\sphericalangle - SBO_1\sphericalangle = \frac{\pi}{2},$$

és éppen ezt akartuk bizonyítani.

II. Megoldás. Rögzítsük a pozitív forgásirányt úgy hogy az A, B, C csúcsok ilyen sorrendben helyezkedjenek el a háromszög köré írt k körön. Hogy kevesebb esetet kelljen megkülönböztetni, irányított szögekkel fogunk dolgozni. Két irányított szöget azonosnak tekintünk akkor, ha különbségük 2π egész számú többszöröse.

Ha X, Y a k kör pontjai, akkor az XY irányított ívhez tartozó (irányított) kerületi szöget jelölje $\varphi(XY)$. Például $\varphi(AB)=\gamma$, $\phi(BC)=\alpha$ és $\phi(CA)=\beta$ a háromszög szögei, ugyanakkor $\varphi(BA)=180°-\gamma$. Azt mondjuk, hogy az XY (irányított) szakasz a P pontból ϕ szög alatt látszik, ha $XPY\sphericalangle=\phi$, ekkor az YX szakasz P-ből $-\phi$ szög alatt látszik. Az ilyen P pontok összessége alkotja az XY szakaszra támaszkodó ϕ szögű látókörívet, ami $\phi=\pi$ esetén a végpontjait nem tartalmazó XY szakasszal, $\phi=0$ esetén pedig az XY egyenes XY szakaszon kívül eső részével egyezik meg.

Ennyi előkészület után most már rátérhetünk a megoldás lényegi részére. A k körön nyilván nem helyezkedhet el megfelelő pont. Legyen tehát először P a k kör egy tetszőleges belső pontja, ekkor az ABC és $A_PB_PC_P$ háromszögek azonos körüljárásúak. Az utóbbi háromszög tehát pontosan akkor szabályos, ha a $\phi(A_PB_P)$, $\phi(B_PC_P)$, $\phi(C_PA_P)$ szögek közül legalább kettő (és persze akkor a harmadik is) $60°$. Mármost

$$APB\sphericalangle=180°-BAP\sphericalangle-PBA\sphericalangle=180°-BAP_A\sphericalangle-B_PBA\sphericalangle=$$
$$180°-\phi(BA_P)-\phi(B_PA)=\phi(AB)+\phi(A_PB_P)=\gamma+\phi(A_PB_P),$$

Az AB, BA_P, A_PB_P és B_PA ívek ugyanis együtt éppen lefedik a k kört, így a hozzájuk tartozó kerületi szögek összege pontosan $180°$. Hasonlóképpen, $BPC\sphericalangle=\alpha+\phi(B_PC_P)$ és $CPA\sphericalangle=\beta+\phi(C_PA_P)$. Az $A_PB_PC_P$ háromszög tehát pontosan akkor szabályos, ha a P pontból az AB, BC, CA szakaszok rendre $\gamma+60°$, $\alpha+60°$, $\beta+60°$ szögben látszanak. E három feltétel közül persze elég csak kettőt megkövetelni.

Most már nem nehéz megmutatni, hogy a k körön belül pontosan egy ilyen P pont van. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy α, $\gamma<120°$. Tekintsük most az AB szakaszra támaszkodó $\gamma+60°$ szögű ℓ_C látókörívet és a BC szakaszra támaszkodó $\alpha+60°$ szögű ℓ_A látókörívet, ezek tehát a megfelelő szakaszoknak a háromszöget tartalmazó oldalán helyezkednek el. A harmadik hasonló látókörívre is (amely már nem biztos, hogy az AC szakasznak a háromszöget tartalmazó oldalán helyezkedik el) szükségünk lesz később, ezt jelöljük ℓ_B-vel. Hogy ez a két ív pontosan egy pontban metszi egymást, méghozzá a k kör belsejében, a következőképpen igazolhatjuk. Először is vegyük észre, hogy mindkét látókörív a k kör belsejében halad. Másodszor, B közös végpontja mindkét ívnek. Ezért a két ívnek legfeljebb egy közös belső pontja lehet, és a metszéspont létrejöttének szükséges és elégséges feltétele az, hogy az ℓ_A ív a BC oldallal, illetve az ℓ_C ív a BA oldallal olyan szögeket zárjon be, amelyek összege β-t meghaladja (most kivételesen nem irányított szögektől beszélünk). Egyszerű számolással ellenőrizhető, hogy ez valóban így van. Azt is megállapíthatjuk, hogy lévén ekkor $CPA\sphericalangle=\beta+60°$, ez a P pont akkor esik az ABC háromszög belsejébe, ha $\beta<120°$, a háromszögön kívül helyezkedik el a $\beta>120°$ esetben, ha pedig $\beta=120°$, akkor az AC oldalra illeszkedik.

Összefoglalva tehát megállapíthatjuk, hogy a k körön belül mindig pontosan egy ilyen pont van, méghozzá az ABC háromszög belsejében, ha a háromszög minden szöge $120°$-nál kisebb, annak határán, ha a háromszögnek van egy $120°$-os szöge, illetve azon kívül, ha valamelyik szöge $120°$-nál nagyobb. Ebből a P pontból az AB, BC, CA szakaszok rendre $\gamma+60°$, $\alpha+60°$, $\beta+60°$ alatt látszanak.

Legyen most a P pont a k kör egy külső pontja. Az $APB\sphericalangle$ meghatározásához különböztessünk meg négy esetet annak megfelelően, hogy a PA és PB félegyeneseken a P, A, A_P, illetve P, B, B_P pontok milyen sorrendben helyezkednek el (*1. ábra*). Megjegyezzük, hogy az irányított szögekkel való számolásnak az is előnye, hogy nem kell azzal foglalkoznunk, hogy ez a két félegyenes egymáshoz képest milyen helyzetű. Mind a négy esetben könnyen ellenőrizhető, hogy

$$APB\sphericalangle=180°-BAP\sphericalangle-PBA\sphericalangle=180°-\phi(BA_P)-\phi(B_PA)=$$
$$(180°-\phi(BA_P)-\phi(A_PA))-\phi(B_PA_P)=\phi(AB)-\phi(B_PA_P)=\gamma-\phi(B_PA_P)\ .$$

Ugyanígy $BPC\sphericalangle=\alpha-\phi(C_PB_P)$ és $CPA\sphericalangle=\beta-\phi(A_PC_P)$. Mivel most az $A_PB_PC_P$ háromszög körüljárása ellentétes az ABC háromszögével, ez a háromszög pontosan akkor szabályos, ha a $\phi(B_PA_P)$, $\phi(C_PB_P)$, $\phi(A_PC_P)$ szögek közül legalább kettő (és persze akkor a harmadik is) $60°$. Ezzel ekvivalens az, hogy a P pontból az AB, BC, CA szakaszok rendre $\gamma-60°$, $\alpha-60°$ és $\beta-60°$ alatt látszanak. Jelölje az ennek megfelelő látóköríveket rendre ℓ'_C, ℓ'_A és ℓ'_B.

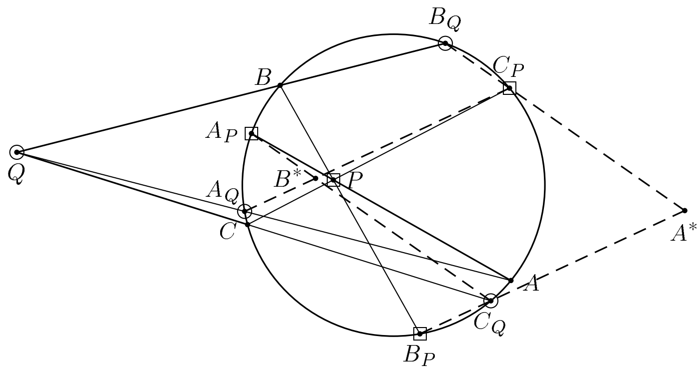
Állítás. *A k körre vonatkozó inverziónál az ℓ_A, ℓ_B, ℓ_C ívek képe rendre ℓ'_A, ℓ'_B és ℓ'_C.*

Ebből azonnal következik, hogy a k körön kívül is pontosan egy olyan Q pont van, amelyre az $A_QB_QC_Q$ háromszög szabályos, mégpedig ez a pont a P pont inverz képe. Probléma csak akkor lenne, ha P egybeesne a k kör középpontjával, ez azonban nem lehetséges, hiszen az ABC háromszög nem szabályos. Egyúttal azt is megkaptuk, hogy a k kör középpontja, valamint a P és Q pontok egy egyenesen vannak.

Most már csak a fenti állítást kell igazolni. Ha a háromszög szögeire semmiféle megkötést nem teszünk, akkor szimmetria okok miatt nyilván elég annyit megmutatni, hogy ℓ_A inverz képe éppen ℓ'_A. A bizonyítás azon az egyszerű észrevételen múlik, hogy az a két ív, amelynek pontjaiból az XY (irányított) szakasz ϕ_1, illetve ϕ_2 szög alatt látszik, $\phi_1-\phi_2$ szöget zár be egymással. Ennek alapján a kerületi szögek tételéből következik, hogy mind az ℓ_A ív, mind az ℓ'_A ív $60°$-os szöget zár be a k körrel. Nem nehéz megmutatni, hogy az ℓ_A ív a k körön belül, az ℓ'_A ív pedig azon kívül halad. A két ívnek ugyanazok a végpontjai, de nem egészítik ki egymást egyetlen körvonallá. Mivel az a két körvonal, amely a k-t a B és C pontokban egyaránt $60°$-os szög alatt metszi, egymás inverz képe a k körre nézve, a szóban forgó két ív is egymás inverze, és ezt akartuk bizonyítani.

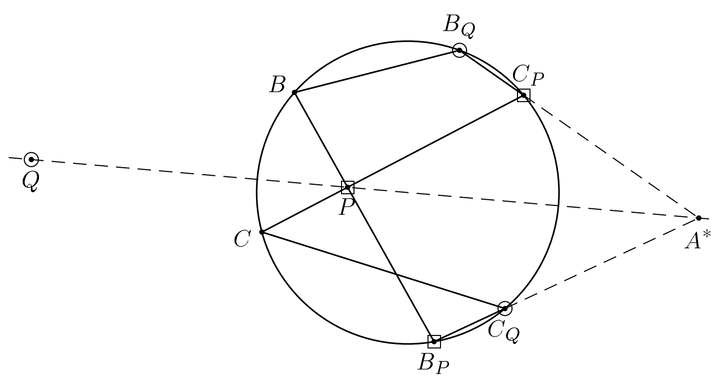
III. Megoldás. (*Béky Bence* megoldása.) Az előző megoldások valamelyikét követve először is megállapítjuk, hogy valóban két ilyen pont létezik, méghozzá egy a háromszög köré írható körön belül (jelöljük ezt P-vel), a másik pedig a körön kívül (legyen ez Q). Vegyük most észre, hogy az $A_PB_PC_P$ háromszög körüljárása megegyezik az ABC háromszögével, míg az $A_QB_QC_Q$ háromszögé azzal ellentétes. Található tehát egy, a k kör O középpontjára illeszkedő e egyenes, amelyre az $A_PB_PC_P$ háromszöget tükrözve az $A_QB_QC_Q$ háromszöget kapjuk.

Vizsgáljuk először azt az általános esetet, amikor A_P különbözik a B_Q, C_Q pontoktól, B_P különbözik az A_Q, C_Q pontoktól és C_P is különbözik az A_Q, B_Q pontoktól. Nem lehet, hogy például az A_PB_Q egyenes egybeesik az A_QB_P egyenessel, mert ekkor $A_P = B_P$ lenne. Az A_PB_Q egyenes tehát csak akkor lehet párhuzamos az A_QB_P egyenessel, ha egyben e-vel is párhuzamos. Ugyanez elmondható a másik két értelemszerűen felírt egyenespárról. Jelölje A^*, B^* és C^* rendre a B_PC_Q és B_QC_P egyeneseknek, az A_PC_Q és A_QC_P egyeneseknek, illetve az A_PB_Q és A_QB_P egyeneseknek a metszéspontját. Az elmondottak szerint ezen egyenespárok közül legfeljebb egy lehet párhuzamos helyzetben, az e egyenesre eső A^*, B^*, C^* pontok közül tehát kettő biztosan létrejön. Feltehetjük, hogy az A^* és B^* pontok ilyenek. Világos, hogy A^* és B^* különböző pontok (*4. ábra*).



4. ábra

Tekintsük most a k körbe írt $BB_QC_PCC_QB_P$ önmagát átmetsző hatszöget. Ennek BB_Q és CC_Q szemközti oldalai Q-ban, B_QC_P és C_QB_P szemközti oldalai A^*-ban, C_PC és B_PB szemközti oldalai pedig P-ben metszik egymást. Pascal tétele szerint tehát az A^* pont illeszkedik a PQ egyenesre (*5. ábra*).



5. ábra

Hasonlóképpen belátható, ezúttal az $AA_QC_PCC_QA_P$ hatszögből kiindulva, hogy a B^* pont is illeszkedik a PQ egyenesre. A PQ egyenes tehát egybeesik az A^*B^* egyenessel, vagyis az O ponton áthaladó e egyenessel, ami bizonyítja az általános esetben a feladat második állítását.

Tegyük fel végül, hogy mondjuk $B_P = C_Q = X$, ekkor az e-re való szimmetria miatt $B_Q = C_P = Y$, végül pedig $A_P = A_Q$ a k körnek az a Z pontja, amelyre az XYZ háromszög szabályos. Világos, hogy Z illeszkedik az e egyenesre, XY pedig merőleges arra. Ekkor az B_PC_Q és B_QC_P egyenesek helyett tekintsük a k körhöz annak X, illetve Y pontjában húzott érintőjét, ez a két egyenes a Z pontnak az XY-ra vonatkozó tükörképében metszi egymást. Jelöljük most ezt a pontot A^*-gal. A B^*, C^* pontok ugyanúgy definiálhatók, mint az általános esetben, és ezúttal egybeesnek Z-vel. Az A^* és B^* pontok tehát most is az e egyenest határozzák meg. Most már szinte szó szerint megismételhetjük az előző bekezdést azzal az apró módosítással, hogy most a $BB_QC_PCC_QB_P$ hatszög elfajuló abban az értelemben, hogy két-két szomszédos csúcsa egybeesik. Ezért a Pascal tétel alkalmazásánál a B_PC_Q és B_QC_P egyenesek helyett éppen az előbb említett érintőket kell tekinteni.

Megjegyzések. 1. A feladat komplex számok segítségével viszonylag egyszerű számolás útján is megoldható. Ezt az utat választotta Gyenes Zoltán a második állítás bizonyításához.

2. Egy mélyebb matematikai eszközöket használó megoldást tartalmaz, és a feladat hátterére mutat rá *Hraskó András* cikke, amely a következő számunkban jelenik meg.

3. A harmadik megoldásból azonnal leolvasható, hogy az $A_PB_PC_P$ és $A_QB_QC_Q$ háromszögek a PQ egyenesre szimmetrikusan helyezkednek el. Erre az eredményre az első megoldás ügyes folytatásával is eljuthatunk. *Hogyan?* Ennek az önmagában is szép feladatnak a megoldását már az olvasóra bízzuk.

3. *Legyen k nemnegatív egész szám, és tegyük fel, hogy az a_1, a_2, $\ldots$, a_n egész számok legalább $2k$ különböző maradékot adnak $(n+k)$-val osztva. Bizonyítandó, hogy a számok között van néhány, amelyek összege osztható $(n+k)$-val.*

I. megoldás. Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy az a_1, a_2, $\ldots$, a_{2k} számok páronként különböző maradékot adnak $(n+k)$-val osztva. Tekintsük a következő $n+k$ különböző számot:

$b_1 = a_1, \qquad b_2 = a_1, \qquad b_3 = a_1 + a_2 b_{3i+1} = a_1 + a_2 + \ldots + a_{2i} + a_{2i+1} \qquad (0 < i < k), \qquad b_{3i+2} = a_1 + a_2 + \ldots + a_{2i} + a_{2i}$

Ha ezek között van olyan, amelyik osztható $(n+k)$-val, akkor mar készen is vagyunk. Ellenkező esetben pedig van a számok között kettő, mondjuk b_s és b_t $(s < t)$ amelyik ugyanolyan maradékot ad $(n+k)$-val osztva. Ekkor $b_t - b_s$ nyilván osztható $(n+k)$-val. Azt kell már csak észrevennünk, hogy ez a különbség felírható az a_1, a_2, $\ldots$, a_n számok közül néhánynak az összegeként. Ha ugyanis ez nem így lenne, akkor valamilyen k-nál kisebb i-re $s = 3i+1$ és $t = 3i+2$, vagyis $b_t - b_s = a_{2i+2} - a_{2i+1}$ volna. Ez azonban feltételezésünk értelmében nem osztható $(n+k)$-val.

II. megoldás. Ugyanehhez a végeredményhez egy kissé eltérő kiindulással is eljuthatunk.

Állítás. *Tetszőleges $b_1, b_2, \ldots, b_N$ egész számok esetén léteznek olyan $1 \le i \le j \le N$ indexek, hogy a $b_i + b_{i+1} + \ldots + b_j$ összeg osztható N-nel.*

Ez egyébként éppen a feladat állítása a $k = 0$ esetben. A bizonyításhoz tekintsük $t = 0$, 1, $\ldots$, N esetén az $s_t = b_1 + \ldots + b_t$ összegeket, ahol $s_0 = 0$ az üres összeg. Az így felírt $N+1$ egész szám között biztosan van kettő, amelyik ugyanolyan maradékot ad N-nel osztva. Ha s_k és s_ℓ $(0 \le k < \ell \le N)$ két ilyen összeg, akkor $s_\ell - s_k = b_{k+1} + b_{k+2} + \ldots + b_\ell$ osztható N-nel.

A feladatot ezután a következő módon vezethetjük vissza erre a speciális esetre. Az első megoldáshoz hasonlóan, most is feltehetjük, hogy az a_1, a_2, $\ldots$, a_{2k} számok páronként különböző maradékot adnak $(n+k)$-val osztva. Tekintsük a

$$b_1 = a_1,\ b_2 = a_2 - a_1,\ b_3 = a_1,\ b_4 = a_3,\ b_5 = a_4 - a_3,\ b_6 = a_3,\ \ldots,\ b_{3k} = a_{2k-1},$$
$$b_{3k+1} = a_{2k+1},\quad b_{3k+2} = a_{2k+2},\quad \ldots,\quad b_{n+k} = a_n$$

számokat. Így éppen $N = n + k$ egész számot írtunk fel.

A fenti állítás értelmében léteznek olyan $1 \le i \le j \le N$ indexek, hogy $S = b_i + b_{i+1} + \ldots + b_j$ osztható N-nel. Elegendő azt megmutatni, hogy S felírható az a_1, a_2, $\ldots$, a_n számok közül néhánynak az összegeként. Ez egészen nyilvánvaló akkor, ha $i \ge 3k+1$, ebben az esetben ugyanis

$$S = a_{i-k} + a_{i-k+1} + \ldots + a_{j-k}.$$

Ha $i \le 3k < j$, akkor legyen $i = 3s + q$, ahol $0 \le s < k$ és $1 \le q \le 3$. Ekkor nyilván

$$S = A + a_{2s+3} + a_{2s+4} + \ldots + a_{j-k},$$

ahol $A = a_{2s+1} + a_{2s+2}$, a_{2s+2}, vagy a_{2s+1} annak megfelelően, hogy q értéke 1, 2, vagy pedig 3.

Végül $j \le 3k$ esetén legyen $i = 3s + q$, $j = 3t + r$, ahol $0 \le s \le t < k$ és $1 \le q,\ r \le 3$. Ekkor könnyen ellenőrizhető, hogy

$$S = A + a_{2s+3} + a_{2s+4} + \ldots + a_{2t} + B,$$

ahol A-t ugyanúgy definiáljuk, mint az előző esetben, B értéke pedig a_{2t+1}, a_{2t+2}, vagy pedig e kettő összege aszerint, hogy $r = 1$, 2, vagy 3, feltéve, hogy $s \ne t$. Ha $s = t$, akkor is könnyen látható, hogy S értéke $a_{2s+1} + a_{2s+2}$, a_{2s+2}, vagy a_{2s+1}. Kivételt képezne az az egyetlen esetet, amikor $s = t$ és $q = r = 2$. Ez azonban nem fordulhat elő, hiszen ekkor $S = a_{2s+2} - a_{2s+1}$ lenne, az a_1, a_2, $\ldots$, a_{2k} számok közül viszont semelyik kettő különbsége nem osztható N-nel.

III. megoldás. (*Kovács Erika Renáta* megoldása.) Ismét tegyük fel, hogy az a_1, $\ldots$, a_{2k} számok páronként különböző maradékot adnak $(n+k)$-val osztva. Vezessük be az $A = \{a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{2k}\}$ jelölést, és legyen $b_1 = a_1$. Ha valamilyen $1 < j \le k+1$ esetén a b_1, b_2, $\ldots$, b_{j-1} számokat már definiáltuk, akkor legyen b_j az A halmaznak egy olyan eleme, amelyik a b_1, b_2, $\ldots$, b_{j-1}, $b_1 + b_2$, $b_1 + b_2 + b_3$, $\ldots$, $b_1 + b_2 + \ldots + b_{j-1}$ számok egyikével sem ad azonos maradékot $(n+k)$-val osztva. Ilyen szám valóban létezik, hiszen ezekkel a feltételekkel az A halmaznak legfeljebb $(j-1) + (j-2) < 2k$ elemét zártuk ki.

Jelölje b_{k+2}, b_{k+3}, $\ldots$, b_{2k} az A halmaz fennmaradó elemeit valamilyen sorrendben, és tekintsük a következő $n+k$ számot:

$s_i = b_1 + b_2 + \ldots + b_i \qquad (1 \le i \le 2k), \qquad s_j = a_1 + a_2 + \ldots + a_j \qquad (2k < i \le n), \qquad s_{n+1} = b_2, s_{n+2} = b_3, \ldots, s_{n+k}$

Ha ezek közül valamelyik osztható $(n+k)$-val, akkor készen is vagyunk, ellenkező esetben viszont közülük kettő azonos maradékot ad $(n+k)$-val osztva, ezek különbsége tehát ismét csak osztható $(n+k)$-val. Az nyilván nem lehetséges hogy mindkét szám az utolsó k darab közül kerüljön ki, hiszen ezek páronként különböző maradékkal rendelkeznek. Ha mindkét szám az első n szám között van, akkor különbségük éppen az a_i számok közül néhánynak az összege, ebben az esetben tehát megint csak célhoz értünk. Végül, ha a két szám közül az egyik s_i, ahol $1 \le i \le n$, a másik pedig s_{n+j}, $1 \le j \le k$, akkor a b_i számok megválasztása miatt $i > j$ kell, hogy teljesüljön. Ekkor azonban $s_{n+j} = b_{j+1}$ éppen az s_i egyik összeadandója, következésképpen az $(n+k)$-val osztható $s_i - s_{n+j}$ szám most is felírható az a_i számok közül néhánynak az összegeként.

IV. megoldás. (*Zábrádi Gergely* ötlete.) Most egy indukciós bizonyítást mutatunk. Pontosabban az alábbi erősebb állítást fogjuk teljes indukcióval igazolni.

Állítás. *Legyenek m, n pozitív egész számok. Ha az a_1, a_2, …, a_n egész számok legalább $2i$ különböző maradékot adnak m-mel osztva, akkor vagy van közöttük néhány, amelyek összege osztható m-mel, vagy képezhető belőlük legalább $n+i$ olyan összeg, amelyek páronként különböző maradékot adnak m-mel osztva.*

Ebből az állításból $m = n+k$, $i = k$ választással az eredeti feladat megoldása azonnal leolvasható.

Ha $i = 0$, akkor egyszerűen tekintjük az a_1, $a_1 + a_2, \ldots, a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ összegeket; ha ezek között van két olyan, amelyik azonos maradékot ad m-mel osztva, akkor különbségük, ami szintén néhány a_i összege, osztható m-mel.

Tegyük fel most egy pillanatra, hogy $i = 1$ esetén is igazoltuk már az állítást. Az indukciós lépéshez legyen $j \ge 1$ és tegyük fel azt is, hogy az állítás igazolást nyert már $i = j$ esetén is. Ebből $i = (j+1)$-re a következőképpen kaphatjuk meg az állítást. Legyenek a_1, a_2, …, a_n olyan egész számok, amelyek legalább $2j+2$ különböző maradékot adnak m-mel osztva. Válasszunk ki közülük két különböző maradékot adót, és tekintsük az összes olyan a_i-t, amelyik ezek valamelyikével kongruens modulo m. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy ezek éppen az a_{t+1}, a_{t+2}, …, a_n számok. Az a_1, a_2, …, a_t számokról tudjuk azt, hogy legalább $2j$ különböző maradékot adnak m-mel osztva.

Tegyük fel, hogy az a_i számokból nem képezhető m-mel osztható összeg. Ekkor az indukciós feltevés és az $i = 1$ esetre vonatkozó feltevés értelmében az a_1, a_2, …, a_t számokból képezhető $t+j$ különböző maradékot adó összeg, az a_{t+1}, a_{t+2}, …, a_n számokból pedig képezhető $n-t+1$ különböző maradékot adó összeg. Jelölje ezeket rendre s_1, s_2, …, s_{t+j}, illetve r_1, r_2, …, r_{n-t+1}. Minden további nélkül feltehető az is, hogy $s_1 = a_1 + a_2 + \ldots + a_t$. Tekintsük most a következő $n+j+1$ számot: s_1, s_2, …, s_{t+j}, $s_1 + r_1$, $s_1 + r_2$, …, $s_1 + r_{n-t+1}$, ezek bármelyike felírható az a_i számok közül néhánynak az összegeként. Tudjuk, hogy az első $t+j$ szám páronként inkongruens modulo m, és hasonlóképpen az utolsó $n-t+1$ is az. Az sem lehet, hogy valamelyik s_b ugyanolyan maradékot ad m-mel osztva, mint $s_1 + r_c$, hiszen különbségük, $(s_1 - s_b) + r_c$ jól láthatóan néhány a_i összege. A felsorolt $n+j+1$ szám tehát páronként inkongruens modulo m, és éppen ezt akartuk megmutatni.

Annyi van már csak hátra, hogy a fent kimondott állítást $i = 1$ esetén is igazoljuk. Tegyük fel tehát, hogy az a_1, a_2, …, a_n számok közül a_1 és a_2 különböző maradékot adnak m-mel osztva. Ha az $a_1, a_2, a_1+a_2, a_1+a_2+a_3, \ldots, a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ számok között van kettő, ami ugyanazt a maradékot adja, akkor különbségük, ami nem más, mint néhány a_i összege, osztható lesz m-mel. Ellenkező esetben pedig máris találtunk $n+1$ olyan összeget, ami mind különböző maradékot ad m-mel osztva.

Megjegyzések. 1. Ahogy azt *Gyenes Zoltán* és *Kiss Gergely* is megjegyzik, az első megoldásból (és az azzal lényegében megegyező másodikból is) világosan látszik, hogy nem kell megkövetelnünk $2k$ különböző maradék létezését: elegendő, ha az a_i számokból kiválasztható k olyan pár, hogy az azonos párban lévő számok különböző maradékot adnak $(n+k)$-val osztva.

Ez megtehető már akkor is (hogyan?), ha csak $k+1$ különböző maradék létezését követeljük meg (feltéve persze, hogy $2k \le n$).

2. A KöMaL 2000. decemberi számának A. 252. feladata szerint a $2k \le n$ feltételre valójában nincs is szükség: a feladatban megfogalmazott állítás igazolásához elég annyit feltenni, ahogy az a_1, a_2, …, a_n számok legalább $k+1$ különböző maradékot adnak $(n+k)$-val osztva. Az alábbiakban erre mutatunk két különböző bizonyítást.

3. Megjegyezzük még, hogy *Szemerédi Endre* egy nehéz eredményére támaszkodva ez a feltétel is lényegesen gyengíthető: ha k értéke n-hez képest „elég nagy”, akkor elegendő annyit feltenni, hogy az a_i számok több, mint $c\sqrt{k}$ különböző maradékot adnak $(n+k)$-val osztva.

V. megoldás. (*Csikvári Péter* megoldásából.) Ha $k = 0$, akkor a feltétel semmitmondó, és a bizonyítandó állítás következik a II. megoldás elején kimondott egyszerű állításból. A továbbiakban legyen tehát $k > 0$.

Tegyük fel, hogy az a_1, a_2, …, a_{k+1} számok különböző maradékot adnak $(n+k)$-val osztva. Legyen $s = a_1 + a_2 + \ldots + a_{k+1}$, és tekintsük $1 \le i \le k+1$ esetén az a_i és $b_i = s - a_i$ számokat, valamint $1 \le j \le n-k$ esetén a $c_j = a_1 + a_2 + \ldots + a_{k+j}$ számokat, ez összesen $n+k+2$ egész szám. Vizsgáljuk meg, hogyan adhat ezek közül kettő ugyanolyan maradékot $(n+k)$-val osztva. Az a_i számok páronként különböző maradékot adnak, csakúgy mint a b_i számok. Ha a c_j számok közül kettő ugyanazt a maradékot adja, akkor már készen is vagyunk. Hasonlóképpen készen vagyunk akkor is, ha valamelyik c_j szám ugyanolyan maradékot ad, mint valamelyik a_i vagy b_i, hiszen mind maga az a_i szám, mind pedig a b_i minden egyes összeadandója szerepel bármelyik c_j összeadandói között. Mivel a_i a b_j-nek is összeadandója $j \ne i$ esetén, feltehetjük azt is, hogy ilyen esetekben a_i és b_j különböző maradékot adnak.

Összefoglalva, feltehetjük tehát, hogy ha a fent felsorolt $n+k+2$ szám között kettő azonos maradékot ad $(n+k)$-val osztva, akkor ez a két szám a_i és b_i egy alkalmas $1 \le i \le k+1$ indexre. Minden egyéb esetben ugyanis a bizonyítandó állítás az elmondottak miatt rögtön következik. Vegyük észre azt is, hogy azonnal befejezettnek tekinthetjük a bizonyítást akkor is, ha a felsorolt $n+k+2$ szám valamelyike osztható $(n+k)$-val. Egyetlen olyan eset képzelhető már csak el, amelyben még nem végeztük el a bizonyítást, nevezetesen ha 3 különböző i index is létezik úgy, hogy a_i és b_i ugyanazt a maradékot adják, vagyis különbségük, $s-2a_i$ osztható $(n+k)$-val. Legyenek ezek i_1, i_2 és i_3, ekkor a $2a_{i_1}$, $2a_{i_2}$ és $2a_{i_3}$ számok ugyanolyan maradékot adnak $(n+k)$-val osztva. Nem nehéz megmutatni, hogy ez csak úgy lehetséges, ha az a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3} számok közül kettőnek a maradéka megegyezik, ellentétben a megoldás legelején tett feltevésünkkel. Ez mutatja, hogy a bizonyítást már minden esetben elvégeztük.

VI. megoldás. (*Nagy Zoltán* megoldásából.) Ha a számok közül valamelyik osztható $(n+k)$-val, akkor már készen is vagyunk, találtunk egy egytagú megfelelő összeget. Tegyük fel tehát, hogy az a_i számok p különböző maradékot $(p \geq k+1)$ adnak $(n+k)$-val osztva, és ezek $0 < m_1 < m_2 < \ldots < m_p < n+k$. Ha egy összeg minden egyes tagját egy azzal azonos maradékot adó számmal helyettesítünk, a kapott összeg nyilván pontosan akkor lesz osztható $(n+k)$-val, ha az eredeti összeg is ilyen volt. Ezért feltehetjük azt is, hogy mindegyik a_i valamelyik m_j-vel egyenlő.

Állítsuk nagyság szerinti sorrendbe az a_i számokat, vagyis legyen $a_1 = a_2 = \ldots = a_{k_1} = m_1$, $a_{k_1+1} = a_{k_1+2} = \ldots = a_{k_2} = m_2$, …, $a_{k_{p-1}+1} = \ldots = a_n = m_p$, ahol $1 \leq k_1 < k_2 < \ldots < k_{p-1} < n$. Tekintsük most minden $1 \leq i \leq n$ esetén az $s_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_i$ összeget, és minden $1 \leq j \leq p-1$ esetén a $t_j = a_1 + a_2 + \ldots + a_{k_j-1} + a_{k_j+1}$ összeget is. Ez összesen $n+p-1 \geq n+k$ szám. Ha ezek között van $(n+k)$-val osztható, akkor készen vagyunk. Ellenkező esetben kell, hogy legyen kettő, amelyik ugyanolyan maradékot ad $(n+k)$-val osztva.

Ha az s_i számok között van két ilyen, akkor a szokásos indoklás működik.

Ha $s_i - t_j$ osztható $(n+k)$-val valamilyen i, j esetén, akkor ismét csak készen vagyunk. Ha ugyanis $i < k_j$, akkor az s_i összeg valódi része a t_j összegnek, és ezért $t_j - s_i$ néhány a_i összege. Ha $i > k_j$, akkor pedig a t_j összeg képezi valódi részét az s_i összegnek. Az pedig nem lehet, hogy $i = k_j$, mert ekkor $s_i - t_j = a_{k_j} - a_{k_j+1} = m_j - m_{j+1}$ lenne, ami nem osztható $(n+k)$-val.

Végül tegyük fel, hogy $t_\ell - t_j$ osztható $(n+k)$-val valamilyen $1 \leq j < \ell \leq p-1$ esetén. Ha még $j+1 < \ell$ is teljesül, akkor könnyen látható, hogy $t_\ell - t_j$ az a_i számok közül néhánynak az összege. Ugyanez a helyzet akkor is, ha $\ell = j+1$ és $k_{j+1} \geq k_j + 2$. Az pedig nem lehetséges, hogy $\ell = j+1$ és $k_{j+1} = k_j + 1$, ekkor ugyanis $t_\ell - t_j = a_{k_{j+1}+1} + a_{k_j} - a_{k_{j+1}} = m_{j+2} + m_j - m_{j+1}$. Viszont az m_i számokra tett feltevés miatt nyilván $0 < m_j < m_{j+2} + m_j - m_{j+1} < m_{j+2} < n+k$, vagyis az egyetlen megmaradt esetben $t_\ell - t_j$ nem osztható $(n+k)$-val.