A *Kvant* című, orosz ifjúsági matematika–fizika folyóiratban jelent meg a következő feladat:[1] A feladat kitűzője *E. B. Denkin,* sorszáma M. 185. A rövid megoldás megtalálható a *Kvant* 1973. évi 10. számában.

Egy egységnyi területű zsákon öt folt található, amelyek bármelyikének a területe legalább $\frac{1}{2}$*. Mutassuk meg, hogy van a foltok között kettő, melyek közös részének területe legalább* $\frac{1}{5}$*.*

A következőkben egyszerűbb feladatokon keresztül a probléma általánosításához is eljutunk. A felmerülő nehezebb feladatokat $*$-gal jelöltük. Az alábbiakban a zsákot, valamint annak területét is (a feladatban ez egységnyi) M betűvel jelöljük majd, a foltokat és azok területeit pedig M_1, M_2, M_3, M_4, M_5-tel. Szükségünk lesz például az M_1 és M_2 foltok közös részére; ezt M_{12} jelöli majd, és hasonlóan, az M_1, M_2, M_3 foltok közös részét M_{123} stb. Reméljük, a szövegből világosan kiderül majd, mikor beszélünk egy alakzatról és mikor annak területéről.

Lássunk hozzá a feladat megoldásához!

Abból, hogy a foltok területének összege, $M_1 + M_2 + M_3 + M_4 + M_5 \geq \frac{5}{2}$, tehát nagyobb a zsák területénél (hiszen $M = 1$), következik, hogy a foltok között vannak átfedések. A feladatban alsó korlátot kell keresnünk a foltok páronkénti közös részének a területére, meg kell becsülnünk az M_{12}, M_{13}, …, M_{45} számok legnagyobbikát.

Először megmutatjuk, hogy

$$M - (M_1 + M_2 + M_3 + M_4 + M_5) + (M_{12} + M_{13} + M_{14} + \dots + M_{45}) \geq 0. \tag{1}$$

Ha a foltok között nem volnának átfedések, akkor már az $M - (M_1 + M_2 + M_3 + M_4 + M_5)$ különbség sem lenne negatív; ez a különbség egyenlő volna a zsák azon részének a területével, ahol egyáltalán nincsen folt. Mivel a foltok metszik egymást, az $M_1 + M_2 + M_3 + M_4 + M_5$ összeg lényegesen nagyobb, mint a zsák foltokkal fedett részének S területe; itt természetesen $S \leq M = 1$. Valóban, az $M_1 + M_2 + M_3 + M_4 + M_5$ összegben az M_{12} részt kétszer is számoltuk, mivel az M_1 és az M_2 tagok is tartalmazzák; ugyanígy, az M_{123} részt háromszor, és így tovább.

Most bebizonyítjuk, hogy

$$S \geq \sum M_i - \sum M_{ij}, \tag{1'}$$

ahol a képletben $\sum M_i = M_1 + M_2 + M_3 + M_4 + M_5$; $\sum M_{ij} = M_{12} + M_{13} + \dots + M_{45}$, és a továbbiakban is eszerint használjuk a $\sum$ jelölést. Mivel $M \geq S$, innen már következik az (1) egyenlőtlenség, annak alapján pedig már megbecsülhetjük a legalább kétszer lefedett területek M_{12}, M_{13}, … nagyságát. Valóban, (1)-ből következik, hogy

$$M_{12} + M_{13} + \dots + M_{45} \geq (M_1 + M_2 + M_3 + M_4 + M_5) - M \geq \frac{5}{2} - 1 = \frac{3}{2}.$$

A foltok páronkénti átfedéseinek száma $\binom{5}{2} = 10$, azért az M_{12}, M_{13}, …, M_{45} számok legnagyobbika nem kisebb, mint $\frac{3}{2} : 10 = \frac{3}{20}$. Becslésünk sajnos gyengébbnek bizonyult a szükségesnél, mivel $\frac{1}{5} > \frac{3}{20}$.

1. feladat. Az egységnyi területű zsákon kilenc, egyenként $\frac{1}{5}$ területű folt található. Mutassuk meg, hogy van közöttük kettő, amelyek közös részének területe legalább $\frac{1}{45}$.

A szitaformula

A fentiekben a zsák foltozott részének S területére kapott $(1')$ becslés nem bizonyult eléggé élesnek. Próbálkozzunk finomabb módszerrel: hagyjuk el $(1')$ jobb oldaláról az olyan, M_{ij} alakú részek területeit, amelyeket egyszerre legalább három folt fed le. Eddig ugyanis M_{123} például megtalálható a pozitív előjellel szereplő M_1, M_2, M_3 és a negatív előjellel szereplő M_{12}, M_{13}, M_{23} tagokban is, ezért az M_{123} terület egyáltalán nem szerepel $(1')$ jobb oldalán. Így S pontosabb becslését adja a $\sum M_i - \sum M_{ij} + \sum M_{ijk}$ összeg. Természetesen még ez sem pontos, itt ugyanis kétszer számoltuk a zsák azon részét, amit egyszerre legalább négy folt fed le; az M_{1234} mennyiséget például a páratlanszor fedő M_1, M_2, M_3, M_4, M_{123}, M_{124}, M_{134}, M_{234} tagokban összesen 8-szor pozitív, a párosszor fedő M_{12}, M_{13}, M_{14}, M_{23}, M_{24} és M_{34} tagokban pedig összesen 6-szor negatív előjellel vettük figyelembe.

A korábbinál jobban közelíti tehát S értékét a

$$\sum M_i - \sum M_{ij} + \sum M_{ijk} - \sum M_{ijkl}$$

összeg; ez már „majdnem egyenlő" S pontos értékével. Itt már a zsák minden olyan részét figyelembe vettük, amelyet legfeljebb négy folt fed le. De a zsák „legkényesebb”, ötszörösen foltozott része kiesik a fenti összegből, mivel egyszerre

[1] 1

van ott az M_1, M_2, M_3, M_4, M_5; M_{123}, M_{124}, ..., M_{345} tagokban (ez 15 pozitív előjelű tag) és az M_{12}, M_{13}, ..., M_{45}, M_{1234}, M_{1235}, M_{1245}, M_{2345} tagokban is (ez 15 negatív előjelű tag). Tehát S pontos értékét úgy kapjuk, ha az utolsó összeghez hozzáadjuk az M_{12345} tagot. Ekkor

$$S = \sum M_i - \sum M_{ij} + \sum M_{ijk} - \sum M_{ijkl} + M_{12345} \tag{2}$$

(itt i, j, k, $l = 1, 2, 3, 4$ vagy 5).

Legyen σ a zsák ép részének a területe, amelyet egyetlen folt sem fed le. Mivel $\sigma = M - S$ és természetesen $\sigma \geq 0$, így

$$\sigma = M - \sum M_i + \sum M_{ij} - \sum M_{ijk} + \sum M_{ijkl} - M_{12345} \geq 0. \tag{3}$$

A (3) összefüggést az M zsák többszörösen foltozott részeinek szakaszos eltávolításával és azoknak a részeknek a visszaillesztésével kaptuk, amelyeket többször is eltávolítottunk; az összefüggést magyarul *szitaformulának* nevezik. A módszert és a formulát – amelynek más alakja is ismeretes – sok kombinatorikai feladatban használják. Érdemes átgondolni és felírni a képletet akkor is, ha a foltok száma n. Talán bonyolultnak tűnik, de csak a fenti egyszerű elv matematikai formája.

$$\sigma = M - \sum M_{i_1} + \sum M_{i_1 i_2} - \sum M_{i_1 i_2 i_3} + \sum M_{i_1 i_2 i_3 i_4} - \dots\dots + (-1)^{n-1} \sum M_{i_1 i_2 i_3 \dots i_{n-1}} + (-1)^n M_{123\dots n} \geq 0 \tag{4}$$

(itt az i_1, i_2, ..., $i_{n=1}$ indexek az 1, 2, 3, ..., n értékek bármelyikét fölvehetik, de az $M_{i_1 i_2 \dots i_k}$ rész i_1, i_2, ..., i_n indexei feltétlenül különbözők).

Feladatok

2. Írjuk fel és bizonyítsuk be a szitaformulát, ha $n = 6$.

3*. Bizonyítsuk be a (4) formulát.

4. Egy táborban 220 gyerek nyaral. Hatféle sportra van lehetőség, ezek: atlétika (a), röplabda (r), kosárlabda (k), labdarúgás (l), birkózás (b) és sakk (s). Az egyes sportágakban résztvevő gyerekek száma rendre: $(a) - 30$, $(r) - 26$, $(k) - 32$, $(l) - 31$, $(b) - 28$, $(s) - 36$. Az említettek közül 53-an többféle sporttal is megpróbálkoztak: közülük 24-en három vagy annál is több, 9-en legalább négy és a 3 leglelkesebb legalább ötféle sportot is kipróbált. Az utóbb említett 3 között van 1 „csodabogár", aki mind a hat sportággal szerencsét próbált. Hány lusta gyerek nyaralt ebben a táborban, aki tehát egyetlen sportággal sem próbálkozott?

A kiinduló feladat megoldása

Láttuk, hogy az $M - \sum M_i + \sum M_{ij} \geq 0$ egyenlőtlenség nem adja meg kellő pontossággal a minket érdeklő $\max M_{ij}$ mennyiség értékét (így jelöljük az M_{ij} mennyiségek legnagyobbikát). Szükségképpen a teljes becslést használjuk majd, amely tehát a következő:

$$M - \sum M_i + \sum M_{ij} - \sum M_{ijk} + \sum M_{ijkl} - \sum M_{12345} \geq 0 \tag{3'}$$

A másik ötlet, hogy a (4) formula, mint általános összefüggés, valamennyi szóbajövő halmazra alkalmazható, így például ha M_i-re írjuk fel, akkor azt kapjuk, hogy

$$\sigma_1 = M_1 - \sum M_{1i} + \sum M_{1ij} - \sum M_{1ijk} + M_{12345} \geq 0,$$

ahol σ_1 az M_1 foltnak az a része, amelyet más folt nem fed le. Az i, j, k indexek a 2, 3, 4, 5 számok összes lehetséges értékét felveszik. Hasonló egyenlőtlenségeket írhatunk fel az M_2, M_3, M_4, M_5 foltokra is:

$$\sigma_2 = M_2 - \sum M_{2i} + \sum M_{2ij} - \sum M_{2ijk} + M_{12345} \geq 0, \vdots \sigma_5 = M_5 - \sum M_{5i} + \sum M_{5ij} - \sum M_{5ijk} + M_{12345} \geq 0.$$

Ha összeadjuk az így kapott öt egyenlőtlenséget, akkor a

$$\sum M_i - 2\sum M_{ij} + 3\sum M_{ijk} - 4\sum M_{ijkl} + 5M_{12345} \geq 0. \tag{5}$$

egyenlőtlenséget kapjuk. (Ellenőrizzük az együtthatókat!)

Próbáljuk most elkészíteni a $(3')$ és az (5) egyenlőtlenségek olyan kombinációját, amelyben nem szerepelnek a $\sum M_{ijk}$ típusú összegek, tehát a zavaróan „nagy”, hármasan fedett részek. Látható, hogy ehhez (5)-öt $\frac{1}{3}$-dal kell szorozni, és ezt kell hozzáadni $(3')$-höz. Így a következő egyenlőtlenséget nyerjük:

$$M - \frac{2}{3}\sum M_i + \frac{1}{3}\sum M_{ij} - \frac{1}{3}\sum M_{ijkl} + \frac{2}{3}M_{12345} \geq 0. \tag{6}$$

Megmutatjuk, hogy ebből

$$M - \frac{2}{3}\sum M_i + \frac{1}{3}\sum M_{ij} \geq 0 \tag{7}$$

következik.

Valóban, hiszen M_{12345} része az M_{ijkl} halmazok mindegyikének, azért $\sum M_{ijkl} \geq 5M_{12345}$, és így még inkább $-\frac{1}{3}\sum M_{ijkl} + \frac{2}{3}M_{12345} \leq 0$. A (7) egyenlőtlenséget átrendezve kapjuk, hogy

$$\sum M_{ij} \geq 2\sum M_i - 3M \geq 2 \cdot \left(5 \cdot \frac{1}{2}\right) - 3 = 2.$$

Mivel az M_{ij} „dupla lefedettségek” száma 10, ezért közülük legalább egynek az értéke nem kisebb, mint $2 : 10 = \frac{1}{5}$, és éppen ezt kellett bizonyítani! A felhasznált egyenlőtlenségek láncolatát végignézve látható, hogy a fenti becslésben lehetséges egyenlőség, mégpedig pontosan akkor, ha $S = M$, vagyis ha a foltok a zsák teljes területét lefedik, továbbá, ha minden $M_i = \frac{1}{2}$, minden $M_{ij} = \frac{1}{5}$, és minden $M_{ijkl} = 0$. Eredményünk éles:

12	13	14	15	23
24	25	34	35	45
123	124	125	134	135
145	234	235	245	345

Az *1. ábrán* látható elrendezésben az M területű (nagy) téglalap játssza a zsák szerepét, az egyes négyzeteken szereplő számok pedig azt mutatják, hogy hányas számú folt vesz részt a szóban forgó terület lefedésében. Talán zavaró lehet, hogy a „foltok” most nem összefüggő darabok, de a feladatban csak a területük fontos, alakjuk és szerkezetük nem.

Fogalmazzuk most meg az általánosabb feladatot, amelynek a most megoldott csak speciális esete.

A kétszeresen foltozott terület általában

Az egységnyi területű M zsákon n folt található, ezek M_1, M_2, $\dots$, M_n; egyikük területe sem kisebb egy adott pozitív α számnál. Becsüljük meg az M_{ij} számok legnagyobbikának területét. Más szavakkal: minden n-szeresen foltozott zsákon megkeressük a kétszeresen fedett M_{ij} területek legnagyobbikát, és azt kérdezzük, hogy mennyi az így talált maximumok legkisebb értéke. Feltételezzük, hogy ez a minimum létezik, bár végtelen számhalmazról lévén szó ez egyáltalán nem nyilvánvaló. Ilyen jellegű „minimax” feladatok megoldása, amikor maximumként értelmezett számok minimumát keressük, nagyon fontos a modern matematikában. A keresett $\min\max M_{ij}$ természetesen függ az adott α számtól, annak függvénye; mivel a foltok számától, az n-től is függ, ezért jelöljük $f_n(\alpha)$-val. (Itt természetesen $0 \leq \alpha \leq 1$ és $n \geq 2$). A kiinduló „zsák–folt” feladatot megoldva az $f_5\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{5}$ egyenlőséget bizonyítottuk be. A feladat általánosításában az $f_n(\alpha)$

függvényt kellene megadni α és n segítségével.

Tapasztalatok gyűjtése érdekében vizsgáljuk először az egyszerűnek tűnő $n = 2$ esetet. Legyen tehát az egységnyi területű M zsákon két folt (M_1 és M_2) úgy, hogy mindkettejük területe legalább α; feladatunk, hogy megtaláljuk az M_1 és M_2 foltok M_{12} közös részének a legkisebb $f_2(\alpha)$ területét. Világos, hogy ha $\alpha \leq \frac{1}{2}$, akkor lehetséges, hogy egyáltalán nincsen átfedés (*2.a ábra*); ha pedig $\alpha \geq \frac{1}{2}$, akkor kétszeresen fedett M_{12} terület legkisebb értéke $2\alpha - 1$ (*2.b ábra*). Így

$$f_2(\alpha) = 0, ha$$

$0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}, 2\alpha - 1, ha1\ {}_{2\leq\alpha\leq1}, (8)$

$$afggvnygrafikonjalthata3.brn.$$

Feladat

5. Jellemezzük az $y = f_3(\alpha)$ függvényt.

Útmutatás: vizsgáljuk az M körlap olyan egybevágó M_1, M_2, M_3 körcikkeit, amelyek szimmetriatengelyei páronként $120°$-os szöget zárnak be, középponti szögük mérőszáma pedig α, pontosabban a teljesszög α-szorosa. Kezdjük kicsi értékekkel (*4. ábra*), majd fokozatosan növeljük α értékét egészen 1-ig.

Öt folt

Térjünk most vissza az eredeti feladathoz, keressük, hogy legalább mekkora a kétszeresen lefedett terület, amennyiben az M zsákon található M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 foltok bármelyikének területe legalább α. Világos, hogy $f_5(\alpha) \geq 0$, vagyis az $y = f_5(\alpha)$ függvény grafikonja nem helyezkedhet el az x tengely alatt (*5. ábra*). A függvény értéke lehet nulla, ha a foltok elrendezhetők úgy, hogy mindegyik M_{ij} értéke nulla. Ez pontosan akkor lehetséges, ha a foltok területének összege, amely a feltételek szerint legalább 5α, nem nagyobb 1-nél (mivel a zsák területe egységnyi): $f_5(\alpha) = 0$, ha $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{5}$. Továbbá az (1) egyenlőtlenségből következik, hogy $\sum M_{ij} \geq \sum M_i - M \geq 5\alpha - 1$. Figyelembe véve, hogy a foltok „páronkénti (dupla) átfedéseinek” száma egyenlő 10-zel, kapjuk, hogy

$$f_5(\alpha) \geq \frac{1}{10}(5\alpha - 1) = \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{10}. (9)$$

A (9) egyenlőtlenség minden szóba jövő α-ra igaz; így az $y = f_5(\alpha)$ függvény grafikonja nem helyezkedhet el az $y = \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{10}$ egyenes alatt (*6. ábra*). Ahhoz, hogy a (9)-ben éppen egyenlőség álljon, szükséges, hogy $\frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{10}$ nagyobb legyen nullánál; ezen kívül még az is, hogy az (1) egyenlőtlenségben is az egyenlőség teljesüljön – tehát mindegyik M_{ijk} értéke nulla kell, hogy legyen, és minden M_{ij} értéke ugyanannyi, $\frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{10}$ kell legyen. De ha az összes $M_{ijk} = 0$, akkor mindegyik α területű folton, például az M_1-en, az egyenként $\frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{10}$ területű M_{12}, M_{13}, M_{14} és M_{15} foltoknak már átfedések nélkül kell elhelyezkedniük. Ez csak akkor lehetséges, ha $4\left(\frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{10}\right) \leq \alpha$, azaz $\alpha \leq \frac{2}{5}$. Sikerült tehát az $f_5(\alpha)$ függvényt kiterjesztenünk: $f_5(\alpha) = \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{10}$, ha $\frac{1}{5} \leq \alpha \leq \frac{2}{5}$.

A továbbiakban ismét a (7) egyenlőtlenséget használjuk. Ebből az egyenlőtlenségből következik, hogy $\sum M_{ij} \geq 2\sum M_i - 3M \geq 2(5\alpha) - 3 = 10\alpha - 3$, tehát

$$f_5(\alpha) \geq \frac{1}{10}(10\alpha - 3) = \alpha - \frac{3}{10}. (10)$$

A (10) egyenlőtlenség minden α esetén teljesül, vagyis az $f_5(\alpha)$ függvény grafikonja teljes egészében az $y = \alpha - \frac{3}{10}$ egyenes felett helyezkedik el (*7. ábra*); megjegyzendő, hogy (10)-ben csak akkor lehetséges egyenlőség, ha $\frac{2}{5} \leq \alpha \leq \frac{3}{5}$ (lásd a 6.a feladatot). A továbbiakban a szitaformulát nem csak a foltok M_i területére alkalmazzuk majd, mint a megoldásban tettük, hanem a kétszeresen és a háromszorosan fedett M_{ij}, M_{ijk} területekre is. Így, ha például az említett képletet az M_{12} területre használjuk, amelyen az M_{123}, M_{124} és M_{125} foltok helyezkednek el, a következőt kapjuk:

$$\sigma_{12} = M_{12} - \sum M_{12i} + \sum M_{12ij} - M_{12345} \geq 0.$$

Összesen tíz ilyen egyenlőtlenség írható fel; ezeket összeadva kapjuk, hogy

$$\sum M_{ij} - 3\sum M_{ijk} + 6\sum M_{ijkl} - 10M_{12345} \geq 0. (11)$$

Hasonlóan, az M_{123}-ra (ezen az M_{1234} és M_{1235} foltok találhatók) felírt szitaformula azt adja, hogy

$$\sigma_{123} = M_{123} - \sum M_{123i} + M_{12345} \geq 0.$$

Mivel a foltok M_{ijk} hármas átfedéseinek a száma 10, azért ha összeadjuk a megfelelő tíz egyenlőtlenséget, akkor kapjuk, hogy:

$$\sum M_{ijk} - 4\sum M_{ijkl} + 10M_{12345} \geq 0. (12)$$

Mostanra rendelkezésünkre állnak a $(3')$, (5), (11) és (12) egyenlőtlenségek, amelyek kapcsolatot teremtenek az M, $\sum M_i$, $\sum M_{ij}$, $\sum M_{ijk}$, $\sum M_{ijkl}$ és M_{12345} mennyiségek között. Most tekintsük az (5) egyenlőtlenség $\frac{1}{2}$-szeresének, a (11) $\frac{1}{6}$-szorosának és a $(3')$ egyenlőtlenségnek az összegét:

$$M - \frac{1}{2}\sum M_i + \frac{1}{6}\sum M_{ij} - \frac{1}{6}M_{12345} \geq 0(13)$$

Az együtthatók megválasztása miatt ez már nem tartalmazza a háromszoros és a négyszeres $\sum M_{ijk}$, valamint a $\sum M_{ijkl}$ tagokat. Elhagyva az ötszörösen fedett negatív tagot innen következik, hogy

$$M - \frac{1}{2}\sum M_i + \frac{1}{6}\sum M_{ij} \geq 0$$

és ezért

$$\sum M_{ij} \geq 3\sum M_i - 6M \geq 3\,(5\alpha) - 6,$$

tehát

$$f_5(\alpha) \geq \frac{1}{10}\,(15\alpha - 6) = \frac{3}{2}\alpha - \frac{3}{5}.$$

Eszerint az $f_5(\alpha)$ függvény grafikonja nem helyezkedhet el az $y = \frac{3}{2}\alpha - \frac{3}{5}$ egyenes alatt (*8. ábra*). Készítsük most el a $(3')$, (5), (11), (12) egyenlőtlenségek

$$(3') + \frac{3}{5}\cdot(5) + \frac{3}{10}\cdot(11) + \frac{1}{10}\cdot(12)$$

lineáris kombinációját; kapjuk, hogy

$$M - \frac{2}{5}\sum M_i + \frac{1}{10}\sum M_{ij} \geq 0. \tag{15}$$

Itt már csak az M, $\sum M_i$ és $\sum M_{ij}$ tagok szerepelnek. A (15)-ből következik, hogy

$$\sum M_{ij} \geq 4\sum M_i - 10M \geq\geq 4(5\alpha) - 10 = 20\alpha - 10,$$

tehát

$$f_5(\alpha) \geq \frac{1}{10}(20\alpha - 10) = 2\alpha - 1.$$

Az $f_5(\alpha)$ függvény grafikonja tehát nem haladhat az $y = 2\alpha - 1$ egyenes alatt, végeredményben tehát nem helyezkedhet el az *9. ábrán* látható töröttvonal alatt; könnyen belátható, hogy a függvény grafikonja éppen azonos ezzel a töröttvonallal.

Feladatok

6. Bizonyítsuk be, hogy
a) $f_5(\alpha) = \alpha - \frac{3}{10}$, ha $\frac{2}{5} \leq \alpha \leq \frac{3}{5}$; b) $f_5(\alpha) = \frac{3}{2}\alpha - \frac{3}{5}$, ha $\frac{3}{5} \leq \alpha \leq \frac{4}{5}$;
c) $f_5(\alpha) = 2\alpha - 1$, ha $\frac{4}{5} \leq \alpha \leq 1$.

7. Jellemezzük az a) $f_4(\alpha)$ b) $f_6(\alpha)$ függvényt.

A feladat általánosítása

Ezt az esetet az $n = 5$ esethez hasonlóan tárgyaljuk. Világos, hogy n folt esetén az M_1, M_2, …, M_n foltok (ezek bármelyikének területe legalább α) akkor nem fedik egymást, ha az összterületük $\sum M_i \geq n\alpha$, és ez az összterület nem nagyobb $M = 1$-nél (hiszen a zsák területe egységnyi). Ezért $f_n(\alpha) = 0$, ha $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{n}$. A továbbiakban ismét a (4) egyenlőtlenségből (a szitaformulából) indulunk ki. Ebből most

$$M - \sum M_i + M_{ij} \geq 0(16)$$

következik. (Miért?) Így

$$\sum M_{ij} \geq \sum M_i - M \geq n\alpha - 1.$$

Mivel az M_{ij} átfedések száma általában $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$, azért

$$f_n(\alpha) \geq \frac{1}{n(n-1)/2} \cdot (n\alpha - 1) = \frac{2}{n-1}\alpha - \frac{2}{n(n-1)}. \quad (17)$$

A (17) egyenlőtlenség csakis akkor válik egyenlőséggé, ha egyenlőséggé alakul a (16), vagyis ha (4)-ben az összes olyan tag, amelyik a $\sum M_{ij}$ tag után következik, nulla. Szükséges ezen kívül még az is, hogy az egyenként α területű M_i foltok teljesen lefedjék az M zsákot. De ez esetben az M_1 kétszeres lefedései, tehát az M_{12}, M_{13}, …, M_{1n} (ezekből $n-1$ db van) az M_1 foltot további átfedések nélkül fedik le mivel az összes $M_{ijk} = 0$. Miután ekkor $M_{1i} = \frac{2}{n-1}\alpha - \frac{2}{n\,(n-1)}$, azért

$$(n-1)\left[\frac{2}{n-1}\alpha - \frac{2}{n(n-1)}\right] \leq \alpha,$$

tehát $\alpha \leq \frac{2}{n}$ (és természetesen $\alpha \leq \frac{1}{n}$).

A továbbiakban a már megszokott módon az M_i foltokra alkalmazzuk a szitaformulát, majd azok M_{ij}, M_{ijk} stb. átfedéseire. Alkalmazzuk ezt a képletet, például az M_1 foltra, amelyet az M_{12}, M_{13}, …, M_{1n} „másodrendű foltok" fednek:

$$M_1 - \sum M_{1i_1} + \sum M_{1i_1i_2} - \sum M_{1i_1i_2i_3} + \dots$$
$$\dots + (-1)^{n-2} \sum M_{1i_1i_2\dots i_{n-2}} + (-1)^{n-1} M_{123\dots n} \geq 0$$

(ahol $i_1, i_2, \dots, i_{n-2} = 2, 3, \dots, n$). Ha összeadjuk az M_1, M_2, …, M_n foltokra felírt n db egyenlőtlenséget, akkor a következőt kapjuk:

$$\sum M_i - 2\sum M_{i_1i_2} + 3\sum M_{i_1i_2i_3} - \dots \dots + (-1)^{n-2} \cdot (n-1) \sum M_{i_1i_2\dots i_{n-1}} + (-1)^{n-1} \cdot nM_{123\dots n} \geq 0 \quad (18)$$

(hasonlítsuk össze az (5) egyenlőtlenséggel).

A (4)-ból és a (18)-ból a szokott módon iktathatók ki a $\sum M_{i_1i_2i_3}$ tagok – ehhez (18) $\frac{1}{3}$-szorosát kell hozzáadni a (4)-hez:

$$M - \frac{2}{3}\sum M_{i_1} + \frac{1}{3}\sum M_{i_1i_2} - \frac{1}{3}\sum M_{i_1i_2i_3} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{n-3}{3} \cdot M_{123\dots n} \geq 0 \quad (19)$$

A (19)-ből következik

$$M - \frac{2}{3}\sum M_{i_1} + \frac{1}{3}\sum M_{i_1i_2} \geq 0, \quad (19a)$$

és így

$$\sum M_{i_1i_2} \geq 2\sum M_{i_1} - 3M \geq 2(n\alpha) - 3 = 2n\alpha - 3.$$

Tehát

$$f_n(\alpha) \geq \frac{1}{\frac{n(n-1)}{2}}(2n\alpha - 3) = \frac{4}{n-1}\alpha - \frac{6}{n(n-1)}, \quad (20)$$

ahol egyenlőség csakis $\frac{2}{n} \leq \alpha \leq \frac{3}{n}$ esetén lehetséges (lásd a 8. feladatot). A fentiekhez hasonlóan folytatva a következő általános képlethez jutunk:

$$f_n(\alpha) = 2\frac{r-1}{n-1}\alpha - \frac{r\,(r-1)}{n\,(n-1)}, \quad (21)$$

ha $\frac{r-1}{n} \leq \alpha \leq \frac{r}{n}$, ahol $r = 1, 2, 3 \dots, n$.

Feladatok

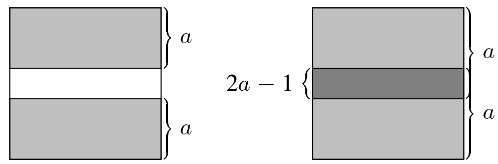
8. Mutassuk meg, hogy (20)-ban csak akkor állhat egyenlőség, ha $\frac{2}{n} \leq \alpha \leq \frac{3}{n}$.

9*. Mutassuk meg, hogy $f_n(\alpha) = \frac{6}{n-1} - \frac{12}{n\,(n-1)}$, ha $\frac{3}{n} \leq \alpha \leq \frac{4}{n}$.

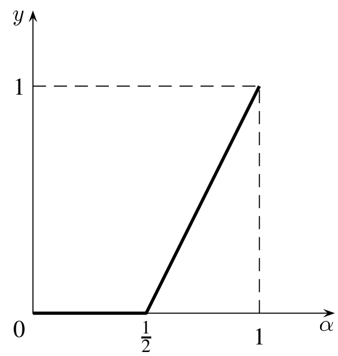
10*. Bizonyítsuk be a (21) összefüggést.

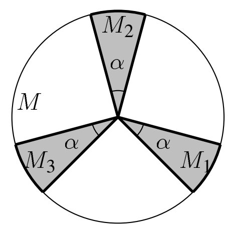
I. M. Jaglom
fordította: *Paulin Elemér*

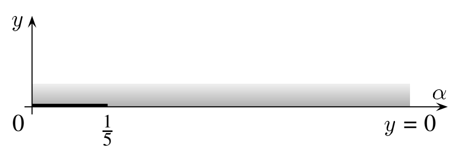
Ennek a cikknek a nyomán tűztük ki a **B. 3378.** *feladatot, amelynek megoldása a 30. oldalon olvasható. A szerk.*

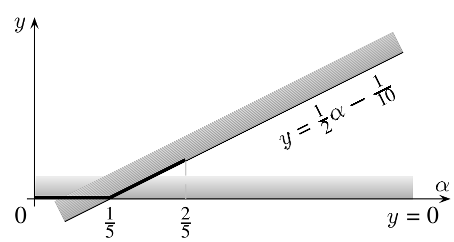


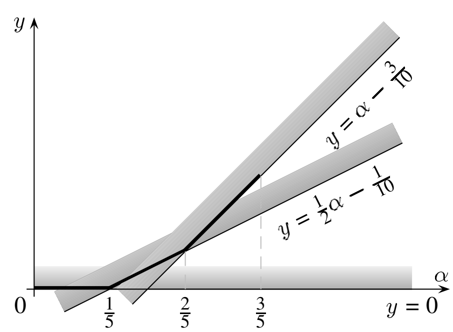
a) b)

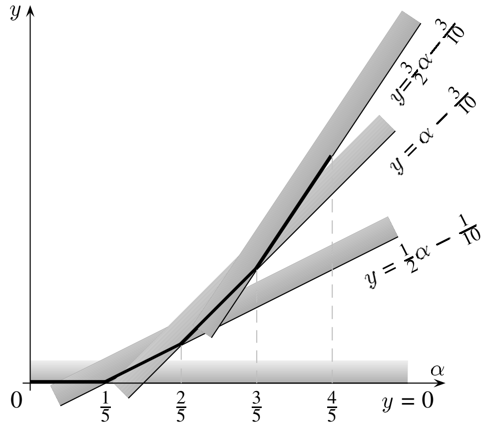


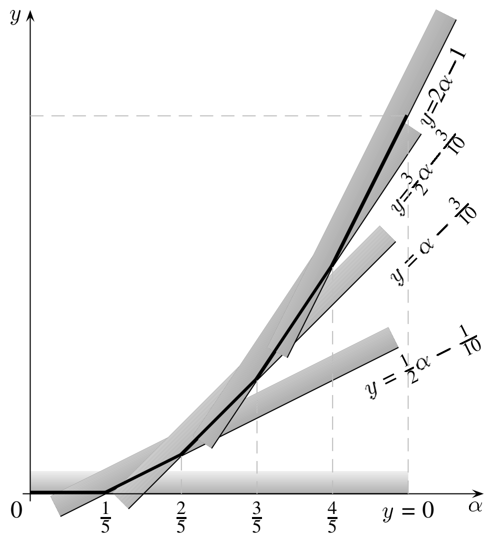









y
α
0
$\frac{1}{5}$
$\frac{2}{5}$
$\frac{3}{5}$
$\frac{4}{5}$
$y = 0$
$y=\frac{3}{2}\alpha-\frac{3}{10}$
$y = \alpha - \frac{3}{10}$
$y = \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{10}$


y
α
0
$\frac{1}{5}$
$\frac{2}{5}$
$\frac{3}{5}$
$\frac{4}{5}$
$y = 0$
$y=2\alpha-1$
$y=\frac{3}{2}\alpha-\frac{3}{10}$
$y = \alpha - \frac{3}{10}$
$y = \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{10}$