A múlt havi számunkban közreadtuk az 1998. évi Téli Ankét totó-kérdéseit[1] A feladatokat Honyek Gyula, Kós Géza, Pataki János és Varga István állította össze.. A telitalálatos szelvény:**[2] A 3. feladat kinyomtatott szövegébe hiba csúszott (mindhárom válasz hibás volt), emiatt ennél a feladatnál az Ankéton nem a szokásos módon, hanem a kérdéses szám megadásával lehetett „tippelni”.

$$1,\ 1,\ 32^{**}, \qquad 1,\ 2,\ 2, \qquad 1,\ 1,\ 2, \qquad 1,\ x,\ 1, \qquad x,\ 1.$$

A mostani feladatok nehezebbnek bizonyultak a korábbiaknál (igaz, nem kellett gyorsan beadni, „alhattak rá egyet” a megoldók). A legjobb eredményt, 11 találatot *Tóth Zsigmond* (Révkomárom, Ipari Középiskola 9. o.) érte el. 10 találatos szelvényt adott be *Börcsök József* (Debrecen, Fazekas M. Gimn. 10. o.), *Balogh Tímea* (Mezőkövesd, Szent László Gimn. 11. o.), *Máthé András* (Bp., ELTE Apáczai Csere J. Gyak. Gimn. 11. o.), *Patay Gergely* (Debrecen, Tóth Á. Gimn. 11. o.), *Gerbicz Róbert* (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn. 12. o.) és *Horváth Gábor* (Debrecen, Fazekas M. Gimn. 12. o.); mindannyian könyvjutalmat kaptak.

Néhány megjegyzés, rövid utalás a feladatok megoldásához.

1. Kiszámítható, hogy

$$t_n = n \sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n} = n\left(\frac{\pi}{n} - \frac{2}{3}\left(\frac{\pi}{n}\right)^3 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)^5\right),$$

$$T_n = n \operatorname{tg}\frac{\pi}{n} = n\left(\frac{\pi}{n} + \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{n}\right)^3 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)^5\right),$$

ahonnan

$$(\pi - t_n) - (T_n - \pi) = \frac{\pi^3}{3n^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^4}\right),$$

ahol $\mathcal{O}(x)$ x „nagyságrendű” számot jelöl. Elegendően nagy számra tehát $\pi - t_n > T_n - \pi$, de pl. $n = 3$-ra a fordított irányú egyenlőtlenség igaz.

2. Úgy is lehet ilyen „kvadrupól-mágnest” készíteni, ha egymással szembefordított (ellentétesen tekercselt) elektromágnes belsejében kialakított kvadrupól-térrel mágnesezünk fel egy lágyvas-rudat.

3. $a = 1998$ jelöléssel a megadott egyenlet $(x-a)(y-a) = a(a+1)$ alakra hozható. Az $1998 \cdot 1999 = 2 \cdot 3^3 \cdot 37 \cdot 1999$ szám pozitív osztóinak száma $2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 2 = 32$, ennyi megoldása van az egyenletnek a pozitív egész számok halmazán. (Könnyen ellenőrizhető, hogy a negatív osztók nem adnak megoldást.)

4. A hangsebesség 1 %-ával haladó adó- és vevőkészüléknél a Doppler-hatás miatt kb. 1 %-nyi frekvencia-eltolódás figyelhető meg. A mozgó „tükörről” visszaverődő hang minden visszaverődésénél $1{,}01/0{,}99 \approx 1{,}0202$-szeresére növekszik a frekvencia, mert a visszaverődés úgy is felfogható, mint hangészlelés és hangkibocsátás egymásutánja. Mivel $(1{,}0202)^{34} < 2 < (1{,}0202)^{35}$, a helyes válasz: 35. (Ha nem vennénk figyelembe, hogy a mozgó hullámforrásra és a mozgó megfigyelőre vonatkozó Doppler-képlet kicsit különbözik egymástól, és naiv módon az „$1\,\% + 1\,\% = 2\,\%$” eltolódással számolnánk, akkor azt kapnánk, hogy 35 visszaverődés még éppen nem elegendő a frekvencia megduplázásához. Igaz, hogy ezen állítás kimondásához a megadott 1 %-os adatot 5 tizedesjegy pontossággal el kellene fogadnunk!)

5. Jelöljük az $n+n$ résztvevőt $F_1, F_2, \ldots, F_n$ és $L_1, L_2, \ldots, L_n$ módon, X választottját pedig X^*-gal. Annak valószínűsége, hogy az F_i és L_j egymást választják:

$$P\left((F_i^*)^* = F_i\right) = \frac{1}{n},$$

a kedvező eseteké pedig

$$p_n = 1 - P\left(F_1^{**} \neq F_1,\ \text{és} \ldots \text{és}\, F_n^{**} \neq F_n\right) = 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n.$$

Mivel $p_3 = \dfrac{19}{27}$ és $p_4 = \dfrac{175}{256} < p_3$, a résztvevők számának $3+3$-ról $4+4$-re történő növelésekor a kedvező eset valószínűsége *csökken*. (p_n monoton csökkenő sorozat, így a résztvevők számának további növelésével a valószínűség tovább csökken, $n \to \infty$ határesetben $1 - (1/e) \approx 0{,}63$-hoz tart.

6. Szemünk a *szögnagyítást*, nem pedig az $N = k/t$ nagyítást érzékeli. Egy T méretű, a lencsétől t távolságban levő tárgy látószöge $T/(t+d)$, a képé pedig $K/(|k|+d)$, ahol d a szemünk és a nagyító távolsága. A szögnagyítás tehát

$$N_{\mathrm{sz}} = \frac{K}{|k|+d} : \frac{T}{t+d} = \frac{k}{t} \cdot \frac{t+d}{|k|+d} = N \cdot \frac{t+d}{|k|+d} < N.$$

---

[1] *

[2]

Úgy is gondolkozhatunk, hogy ha a kép és a tárgy ugyanazon a helyen lenne, a szögnagyítás éppen a K/T nagyítással egyezne meg; mivel azonban a lupén keresztül nézett bélyeg képe messzebbre kerül a szemünktől, mint ahol a bélyeg van, látószöge kisebb, mint $K/T = N$.

7. *Van!* L. Euler azt sejtette, hogy nincs ilyen szám, sőt általában azt, hogy az

$$x_1^n + x_2^n + \dots x_{n-1}^n = y^n$$

egyenletnek nincs nem triviális egész megoldása $n > 3$ esetén, de *tévedett.* Például:

$$95\,800^4 + 217\,519^4 + 414\,560^4 = 422\,481^4.$$

8. A pénzérmék a súlyuk miatt kicsit „belesüppednek” a vízfelszín alkotta hártyába, s ha nem merülnek el, a felületi feszültségből származó erő függőleges összetevője tart egyensúlyt a nehézségi erővel. A közelükbe helyezett másik pénzdarab az enyhén lejtős felületen „le akar csúszni”, a két (vagy több) pénzdarab között tehát vízszintes irányú vonzóerő alakul ki. Sok egyforma pénzt helyezve a víz felszínére megfigyelhetjük, hogy ez a „rövid hatótávolságú” vonzóerő szabályos „kristályrácsba” rendezi a pénzdarabokat, mintegy modellezi az atomok közötti vonzóerő hatására végbemenő kristályosodás folyamatát.

9. $\pi(x)$ aszimptotikusan $\dfrac{x}{\ln x}$-hez tart (a hányadosuk határértéke 1), de pontosabb becslés a

$$(*) \qquad \pi(x) = \int_2^x \frac{dt}{\ln t} + \mathcal{O}\left(xe^{-c\log^{3/5}-\varepsilon x}\right).$$

(Linnik, 1942; Vinogradov és Korobov, 1957.)

Parciálisan integrálva

$$\int_2^x \frac{dt}{\ln t} = \left[\frac{t}{\ln t} + \frac{t}{\ln^2 t}\right]_2^x + \int_2^x \frac{2dt}{\ln^3 t} > \frac{x}{\ln x} + \frac{x}{\ln^2 x} - c.$$

Az $\dfrac{x}{\ln^2 x}$ tag sokkal nagyobb, mint a $(*)$ becslés hibája, ezért elég nagy x-re $\pi(x) > \dfrac{x}{\ln x}$.

10. A mellékmaximumok száma kettővel kevesebb, mint a rácsot alkotó rések száma. (Kettős rés esetén minden maximum főmaximumnak tekinthető, három résnél 1 mellékmaximum jelenik meg stb.) Ezt az egyes résekből érkező hullámok fázishelyes összeadásával, majd az így kapott „eredő hullám” négyzetének kiszámításával láthatjuk be.

11. A kérdéses függvény szükségképpen bijektív. Mivel $f(a) = b$ esetén $f(b) = -a$, $f(-a) = -b$ és $f(-b) = a$, egyrészt $f(f(0)) = 0$, $f(0) = f(f(f(0))) = f(0) = -f(0)$, tehát $f(0) = 0$, másrészt az $f(x) = x$ egyenletnek ez az egyetlen megoldása.

Tegyük fel, hogy f folytonos az (a, b) intervallumon $(0 < a < b)$ és $f((a, b)) = (c, d)$. Ekkor $f((c, d)) = (-b, -a)$, $f((-b, -a)) = (-d, -c)$ és $f((-d, -c)) = (a, b)$. Nem nehéz végiggondolni, hogy f nem lehet folytonos a 0-ban, valamint a $(0, \infty)$-hez rendelt értékei között pozitív és negatív is van.

Tegyük fel, hogy a függvény a $0, \pm p_1, \dots, \pm p_n$ pontokban szakad. Ekkor a függvény 4-esével ciklikusan cseréli a szakadási helyek közötti intervallumokat, melyek száma $2n + 2$. Másrészt a $\pm p_1, \dots, \pm p_n$ pontokat is 4-esével cseréli, ezek száma $2n$. Viszont $2n$ és $2n + 2$ egyszerre nem lehet 4-gyel osztható, tehát f-nek végtelen sok szakadási helye kell legyen.

12. Ha egy nyugvó részecskének egy vele megegyező tömegű másik részecske ütközik rugalmasan, az ütközés után egymásra merőlegesen kezdenek mozogni. (Ellenőrizhető pénzdarabok vízszintes asztallapon történő ütköztetésével.) Ez az energia- és impulzusmegmaradás törvényéből következik, ha a részecskék mozgása nemrelativisztikus. A nagy sebességgel mozgó protonok azonban megközelíthetik a fénysebességet, s ekkor a relativisztikus megmaradási törvényeket kell alkalmaznunk. Ezekből az adódik, hogy az ütközés utáni sebességük hegyesszöget zár be.

13. A víz első fele rövidebb idő alatt folyik ki, mint a második, mert a kiáramlás sebessége fokozatosan csökken. A kifolyási sebesség (közelítőleg) a vízmagasság négyzetgyökével arányos, hasonlóan az egyenletesen változó mozgás $v = \sqrt{2ax}$ képletéhez. Eszerint a tartály $2 + \sqrt{2}$ óra, vagyis több, mint 200 perc alatt ürül ki.

13 + 1. A fény színét a frekvencia határozza meg, az pedig nem változik meg sem az elhajlás, sem pedig a fénytörés során. Érdekes, hogy a helyes eredményt (a tényleges elhajlási szögeket) kétféleképpen is meghatározhatjuk. Ha pl. egy vízzel telt akvárium falához optikai rácsot illesztünk, az üvegfal akármelyik oldalára tesszük is a rácsot, az elhajlási kép ugyanaz lesz. Ez közvetlenül adódik a Fermat-elvből (a legrövidebb terjedési idő elvéből).