

B. 3394. Bizonyítsuk be, hogy pontosan akkor szerkeszthető a , b és c hosszúságú oldalakkal háromszög, ha az a , b , c pozitív valós számokra teljesül, hogy

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 > 2(a^4 + b^4 + c^4).$$

Megoldás. Tudjuk, hogy az a , b és c hosszúságú oldalakkal pontosan akkor szerkeszthető háromszög, ha

$$a + b > c; \quad b + c > a \quad \text{és} \quad a + c > b.$$

Ezért, ha a , b és c egy háromszög oldalai, akkor

$$a + b - c > 0, \quad b + c - a > 0 \quad \text{és} \quad a + c - b > 0,$$

és ekkor nyilván

$$(2) \quad (a + b - c)(b + c - a)(a + c - b) > 0$$

is teljesül.

Megmutatjuk, hogy ha három pozitív valós számra fennáll a (2) egyenlőtlenség, akkor teljesülnek a háromszög-egyenlőtlenségek is:

Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük ugyanis, hogy $a \geq b \geq c$. Ha (2) igaz, akkor a bal oldal három tényezője közül vagy egy pozitív és a két másik negatív, vagy pedig mindhárom tényező pozitív. Az első esetben, mivel az $a + b - c$ tényező a legnagyobb, csak ez lehet a pozitív, és

$$b + c - a < 0, c + a - b < 0, 2c < 0, \text{összeadva}$$

így $c < 0$ volna, ami ellentmondás. Tehát valóban csak az az eset állhat fenn, amikor

$$a + b > c, \quad b + c > 0, \quad a + c > b.$$

A (2) egyenlőtlenséggel azonban ekvivalens a következő:

$$(3) \quad (a + b + c)(a + b - c)(b + c - a)(c + a - b) > 0,$$

hiszen a (2) egyenlőtlenség mindkét oldalát egy pozitív tényezővel, $a + b + c > 0$ -val szoroztuk.

(3) pedig a szorzások elvégzése után némi átalakítással az ekvivalens

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 > 2(a^4 + b^4 + c^4)$$

alakra hozható. Tehát pontosan akkor szerkeszthető az a , b , c hosszúságú oldalakkal háromszög, ha az a , b , c pozitív valós számokra teljesül az (1) egyenlőtlenség.

A B. 3394. feladat egy általánosítása

A feladatban azt kellett bizonyítani, hogy a pozitív a , b , c számokhoz pontosan akkor létezik a , b , c oldalú háromszög, ha

$$(1) \quad (a^2 + b^2 + c^2)^2 > 2(a^4 + b^4 + c^4).$$

M. S. Klamkin egy általánosítási lehetőséget vizsgált [1] cikkében:

Tétel. Ha az $a_1, a_2, \dots, a_n$ pozitív számokra ($n \geq 3$ egész szám) teljesül az

$$(2) \quad (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)^2 > (n-1)(a_1^4 + a_2^4 + \dots + a_n^4)$$

egyenlőtlenség, akkor közülük bármely három a_i , a_j és a_k hosszúságú szakaszból szerkeszthető háromszög. ($i \neq j \neq k$, $1 \leq i, j, k \leq n$, $i, j, k \in \mathbf{N}$)

Figyeljük meg, hogy ez a tétel csak egyik irányban általánosítása az (1) egyenlőtlenségnek: elegendő feltételt ad arra, hogy n darab szakasz közül tetszőlegesen kiválasztott háromból lehessen háromszöget szerkeszteni. A (2) egyenlőtlenség nem szükséges, ezt mutatja például az $a_1 = 5$, $a_2 = 5$, $a_3 = 5$, $a_4 = 9$ számnégyes. E számokra nem teljesül a (2) egyenlőtlenség, míg az 5, 5, 5 és 9 egység hosszúságú szakaszok közül bármely háromból szerkeszthető háromszög.

Nézzük most, hogyan bizonyította *M. S. Klamkin* a fenti tételt:

Teljes indukcióval bizonyítunk. $n = 3$ -ra éppen a **B. 3394.** feladat állítását kapjuk. Legyen most $n > 3$, és tegyük fel, hogy fennáll (2). Azt mutatjuk meg, hogy (2)-ből következik az

$$(3) \quad (a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2)^2 > (n-2)(a_2^4 + a_3^4 + \dots + a_n^4)$$

egyenlőtlenség. Elemi algebrai lépések és teljes négyzetté alakítás után (2)-ről látható, hogy ekvivalens az alábbi egyenlőtlenséggel:

$$(4) \quad 0 > \left(a_1^2 - \frac{S_2}{n-2}\right)^2 - \frac{(S_2^2 - (n-2)S_4)(n-1)}{(n-2)^2},$$

ahol $S_m = a_2^m + a_3^m + \dots + a_n^m$. Így (2)-ből valóban következik (3). Az indukciós feltevés szerint így bármely három szakaszból szerkeszthető háromszög, ha a szakaszok egyike sem a_1 . De a_1 -et tetszőlegesen választottuk, így a tételt igazoltuk.

A továbbiakban megvizsgáljuk a bizonyításban említett elemi algebrai lépéseket. A (2) egyenlőtlenségben az $a_2, a_3, \dots, a_n$ számok m -edik hatványösszegét S_m -mel jelölve ($m = 2$, illetve 4)

$$(a_1^2 + S_2)^2 > (n-1)(a_1^4 + S_4).$$

Négyzetre emelés és rendezés után

$$(5) \quad \begin{aligned} a_1^4 + 2a_1^2S_2 + S_2^2 &> (n-1)a_1^4 + (n-1)S_4 \\ 0 &> (n-2)a_1^4 - 2a_1^2S_2 - S_2^2 + (n-1)S_4 \end{aligned}$$

adódik. A továbbiakban elosztjuk az egyenlőtlenséget a pozitív $(n-2)$ számmal, majd ígéretünk szerint teljes négyzetté alakítunk.

$$\begin{aligned} 0 &> a_1^4 - \frac{2a_1^2S_2}{n-2} - \frac{S_2^2}{n-2} + \frac{(n-1)S_4}{n-2}, \\ 0 &> \left(a_1^4 - \frac{2a_1^2S_2}{n-2} + \frac{S_2^2}{(n-2)^2}\right) - \frac{S_2^2}{(n-2)^2} - \frac{S_2^2}{n-2} + \frac{(n-1)S_4}{(n-2)} \\ 0 &> \left(a_1^2 - \frac{S_2}{n-2}\right)^2 - \frac{n-1}{(n-2)^2}(S_2^2 - (n-2)S_4). \end{aligned}$$

Ez pedig valóban a (4) egyenlőtlenség.

A megfordításhoz írjuk (4)-et az alábbi alakba:

$$\frac{n-1}{(n-2)^2}(S_2^2 - (n-2)S_4) > \left(a_1^2 - \frac{S_2}{n-2}\right)^2.$$

Innen

$$\frac{n-1}{(n-2)^2}(S_2^2 - (n-2)S_4) > 0$$

és így valóban

$$S_2^2 - (n-2)S_4 > 0.$$

Megkaptuk a (3)-as egyenlőtlenséget; (3) és (4) tehát valóban ekvivalensek. Feltételezhetően *M. S. Klamkin* körülbelül erre a levezetésre gondolt.

Klamkin [1] cikkében megemlíti, hogy ha $n > 3$, akkor megoldatlan probléma olyan polinom-egyenlőtlenség megadása, amely szükséges és elegendő ahhoz, hogy n darab adott szakasz közül bármely hármat kiválasztva háromszöget lehessen szerkeszteni belőlük.

Klamkin másik nyitott problémája az, hogy adjuk meg polinom-egyenlőtlenség formájában annak szükséges és elegendő feltételét, hogy az $a_1, a_2, \dots, a_r$ pozitív számokból bárhogyan kiválasztva r darabot ($3 < r < n$) ezek egy r oldalú sokszög oldalainak hosszai legyenek.

Irodalom

[1] Klamkin, Murray S., Simultaneous Triangle Inequalities, *Mathematics Magazine*, **60** (1987), No. 4., 236–237.

Köszönöm szépen dr. Pintér Lajos tanár úrnak (*JATE, Bolyai Intézet, Szeged*), hogy elküldte az [1] cikket.)

Csete Lajos
Markotabödöge