Nyilván fel kell tennünk, hogy $n$ egész is, különben az állítás nem igaz. Jelöljük $5^n\ \sin\ n\alpha$-t $S_n$-nel, és $5^n\ \cos\ n\alpha$-t $C_n$-nel. Akkor

$$S_{n+1}=5^{n+1}\ \sin\ (n\alpha+\alpha)=(5^n\ \sin\ n\alpha)(5\ \cos\alpha)+(5^n\ \cos\ n\alpha)(5\ \sin\ \alpha)=S_nC_1+C_nS_1,$$
$$C_{n+1}=5^{n+1}\ \cos\ (n\alpha+\alpha)=(5^n\ \cos\ n\alpha)(5\ \cos\ \alpha)-(5^n\ \sin\ n\alpha)(5\ \sin\ \alpha)=C_nC_1-S_nS_1.$$

Mivel $S_1=3$, azért $C_1$ csak $\pm4$ lehet. Ezekből az értékekből kiindulva és a fenti képletek alapján számolva az $S_n$, $C_n$ sorozatok elemeiként csupa egész számot kapunk, hiszen a képletekben csak szorzás, összeadás és kivonás szerepel.

Megmutatjuk, hogy nincs olyan $n$, amelyre $S_n$ osztható volna 5-tel. Ha ugyanis volna ilyen $n$, akkor

$$S_n^2+C_n^2=5^{2n}$$

miatt arra $C_n$ is osztható volna 5-tel, és ettől kezdve mindkét sorozat minden tagja osztható volna 5-tel. Mivel

$$S_k^2=\frac{1}{2}(5^{2k}-C_{2k}),$$

ha valamely $k$-ra $C_{2k}$ osztható volna 5-tel, akkor $S_k$ is osztható 5-tel. Ebből végül is azt kapnánk, hogy $S_n$ minden $n$-re osztható 5-tel, ámde $S_1$ nem osztható 5-tel.

*Székely Zoltán* (Szekszárd, Garay J. Gimn., IV. o. t.)

*Megjegyzés.* Hasonlóan látható be általában, hogy minden $n$-hez található $\sin\ x$-nek mint változónak olyan pontosan $n$-edfokú, egész együtthatós $A_n$, $B_n$ polinomja, hogy

$$\sin\ 2k\alpha=(\cos\ \alpha)\cdot A_{2k-1}\ (\sin\ \alpha),\quad \cos 2k\alpha=B_{2k}\ (\sin\ \alpha),$$
$$\sin\ (2k+1)\alpha=B_{2k+1}(\sin\ \alpha),\quad \cos(2k+1)\alpha=(\cos\ \alpha)\cdot A_{2k}\ (\sin\ \alpha).$$

Ebből már következnek állításaink, ha még azt is belátjuk, hogy az $A_n$, $B_n$ polinomokban a legmagasabb fokú tag együtthatója nem osztható 5-tel.