1. Vezessünk be új változót. Legyen $x(x-1)=u$, $2x+3y=v$. Ekkor $u\cdot v=26$ és $u+v=15$. Innen $u=2$, $v=13$ vagy $u=13$, $v=2$, azaz $x(x-1)=2$, $2x+3y=13$ vagy $x(x-1)=13$, $2x+3y=2$. Az egyenletrendszer megoldásai: $x_1=2$, $y_1=3$; $x_2=-1$, $y_2=5$; $x_3=\frac{1}{2}(1+\sqrt{53})$, $y_3=\frac{1}{3}(12-\sqrt{53})$; $x_4=\frac{1}{2}(1-\sqrt{53})$, $y_4=\frac{1}{3}(12+\sqrt{53})$.

2. Legyen $\overrightarrow{AB}=\mathbf{a}$, $\overrightarrow{BC}=\mathbf{b}$, $\overrightarrow{CD}=\mathbf{c}$, $\overrightarrow{DA}=\mathbf{d}$, ekkor $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}=\mathbf{0}$ $(\mathbf{a}+\mathbf{c}=-\mathbf{b}-\mathbf{d})$.

Ha az $ABCD$ négyszög paralelogramma, akkor $\mathbf{c}=-\mathbf{a}$ és $\mathbf{d}=-\mathbf{b}$, tehát $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DC}=\mathbf{a}(-\mathbf{d})+(-\mathbf{a})\mathbf{b}+(-\mathbf{b})\mathbf{c}+\mathbf{d}(-\mathbf{c})=\mathbf{ab}-\mathbf{ab}+\mathbf{ab}-\mathbf{ab}=0$.

Ha $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DC}=0$, akkor $\mathbf{a}(-\mathbf{d})+(-\mathbf{a})\mathbf{b}+(-\mathbf{b})\mathbf{c}+\mathbf{d}(-\mathbf{c})=0$, tehát $(\mathbf{a}+\mathbf{c})(-\mathbf{b}-\mathbf{d})=0$. Mivel $-\mathbf{b}-\mathbf{d}=\mathbf{a}+\mathbf{c}$, azért $(\mathbf{a}+\mathbf{c})^2=0$; $((\mathbf{b}+\mathbf{d})^2=0)$, $\mathbf{a}=-\mathbf{c}$; $(\mathbf{b}=-\mathbf{d})$, azaz a négyszög paralelogramma.

3. Az egyenlet $(\operatorname{tg}x)$-re másodfokú. A diszkriminánsra $D=4(\sin y+\cos y)^2-4\cdot 2\ge 0$ kell, hogy teljesüljön, tehát $1+\sin 2y\ge 2$, $\sin 2y\ge 1$, azaz $\sin 2y=1$, $y=\frac{\pi}{4}+2n\pi$ vagy $y=\frac{5\pi}{4}+2n\pi$.

Ha $y_{1,\,n}=\frac{\pi}{4}+2n\pi$, akkor $\operatorname{tg}x=-\sqrt{2}$, $x_{1,\,k}\approx 2,186+k\pi$, ha $y_{2,\,n}=\frac{5\pi}{4}+2n\pi$, akkor $\operatorname{tg}x=\sqrt{2}$, $x_{2,\,k}\approx 0,955+k\pi$, $k,\ n\in\mathbf{Z}$.

4. Jelölje a trapéz hegyesszögét $2x$ $(0<x<\frac{\pi}{4})$. Ekkor a hosszabb párhuzamos oldal $2\operatorname{ctg}x$, a rövidebb párhuzamos oldal $2\operatorname{tg}x$, a trapéz szára $\operatorname{ctg}x+\operatorname{tg}x$, a trapéz magassága 2 egység.

A forgástest felszínét két egybevágó kúppalást és egy hengerpalást alkotja, a forgástest térfogata két forgáskúp és egy forgáshenger térfogatának az összege.

Az $A(x)$ felszín:

$$A(x)=2\cdot 2\pi(\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x)+2\cdot 2\pi\cdot 2\operatorname{tg}x, A(x)=4\pi(3\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x),\qquad 0<x<\frac{\pi}{4}.$$

A $V(x)$ térfogat:

$$V(x)=2\cdot\frac{4\pi(\operatorname{ctg}x-\operatorname{tg}x)}{3}+4\pi\cdot 2\operatorname{tg}x, V(x)=\frac{8\pi}{3}(2\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x),\qquad 0<x<\frac{\pi}{4}.$$

Ismeretes, hogy ha $a>0$ és $b>0$, akkor $a+b\ge 2\sqrt{ab}$, az egyenlőség $a=b$ esetén teljesül.

$$A(x)=4\pi(3\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x)\ge 4\pi\cdot 2\sqrt{3}=8\sqrt{3}\pi.$$

A minimális felszín $8\sqrt{3}\pi$ területegység; ez akkor jön létre, ha $3\operatorname{tg}x=\operatorname{ctg}x$ és $(0<x<\frac{\pi}{4})$, $\operatorname{tg}x=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $2x=\frac{\pi}{3}$, $(2x=60^\circ)$. A minimális térfogat $V(x)=\frac{8\pi}{3}(2\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x)\ge\frac{8\pi}{3}\cdot 2\sqrt{2}=\frac{16\pi\sqrt{2}}{3}$ térfogategység; ez akkor jön létre, ha $2\operatorname{tg}x=\operatorname{ctg}x$, $\operatorname{tg}x=\frac{1}{\sqrt{2}}\approx 0{,}707$, ahonnan $x\approx 35^\circ 15'$, tehát $2x\approx 70^\circ 30'$.

Rábai Imre