1. Legyen a sorozat első tagja a, hányadosa pedig q. Ekkor $a(1+q^2+q^4)=126$ és $q(a(1+q^2)-30)=0$. Ha $q=0$, akkor $a=126$. Ha $q\neq 0$, akkor $\dfrac{1+q^2+q^4}{1+q^2}=\dfrac{126}{30}$, ahonnan $5q^4-16q^2-16=0$, $q^2=4$ ($q^2=-\dfrac{4}{5}$ nem ad megoldást). Ha $q=2$, akkor $a=6$, ha $q=-2$, akkor is $a=6$.

2. Mivel $a>0$, azért $\sqrt{4a+1}<\sqrt{4a^2+4a+1}=2a+1$. Hasonlóan $\sqrt{4b+1}<2b+1$ és $\sqrt{4c+1}<2c+1$, tehát valóban

$$\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1}<2a+1+2b+1+2c+1=2(a+b+c)+3=9.$$

(A számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenség alkalmazásával $\sqrt{4a+1}=\sqrt{1\cdot(4a+1)}\leq\dfrac{1+4a+1}{2}=2a+1$. Az egyenlőség most nem állhat fenn, hiszen $1=4a+1$ akkor teljesül, ha $a=0$, de a feladatban a pozitív.)

3. A P pont a BD átlóra illeszkedik, hiszen $BPA\sphericalangle+DPA\sphericalangle=180^\circ$. Az ABP, az ADP és az ABD derékszögű háromszögek hasonlóak. A befogó- és a magasságtételt alkalmazva

$$10^2=PD\cdot BD,\qquad 20^2=PB\cdot BD\quad\text{és}\quad PA^2=PB\cdot PD.$$

Mivel $BD=10\sqrt5$, azért $PD=2\sqrt5$, $PB=8\sqrt5$ és $PA=4\sqrt5$.
A PC távolságot a PDC háromszögből a koszinusztétel alkalmazásával számíthatjuk ki. Legyen $PDC\sphericalangle=\delta$, $\cos\delta=\dfrac{20}{10\sqrt5}=\dfrac{2}{\sqrt5}$. $PC^2=\left(2\sqrt5\right)^2+20^2-2\cdot2\sqrt5\cdot20\cdot\dfrac{2}{\sqrt5}$, $PC=2\sqrt{65}$.

4. *a*) $x\neq1$, $x\neq-2$ és $(x-1)^2(x+2)^2=4$, vagyis $(x-1)(x+2)=-2$ vagy $(x-1)(x+2)=2$. A kapott $x_1=0$, $x_2=-1$, $x_3=\dfrac{-1+\sqrt{17}}{2}$, $x_4=\dfrac{-1-\sqrt{17}}{2}$ számok az adott egyenletnek megoldásai.

b) $x\neq1$ és $x>-2$. Ennek az egyenletnek x_1, x_2 és x_3 a gyökei.

c) és *d*) $x>1$. Ekkor x_3 az egyetlen megoldás.

5. A koszinusztétel alkalmazásával $c^2-a^2-b^2=-2ab\cos\gamma$, a háromszög területe pedig $T=\dfrac12ab\sin\gamma$. A feltétel szerint

$$\frac12ab\sin\gamma=-2\cdot\frac{\sqrt3}{4}ab\cos\gamma,$$

ahonnan $\operatorname{tg}\gamma=-\sqrt3$, $\gamma=120^\circ$. Most $c^2=a^2+b^2-2ab\cos120^\circ$, $c=\sqrt{a^2+b^2+ab}$.

Mivel $c=2r\sin\gamma$, azért $\sqrt{a^2+b^2+ab}=2r\cdot\dfrac{\sqrt3}{2}$. A háromszög köré írt kör sugara

$$r=\sqrt{\frac{a^2+ab+b^2}{3}}.$$

6. Az $x^2+3ax-\dfrac43b=0$ egyenlet gyökei legyenek x_1, x_2, az $x^2-a^2x-2ab=0$ egyenlet gyökei ekkor x_1+2, x_2+2. A gyökök és az együtthatók összefüggései alkalmazásával

$$x_1+x_2=-3a, x_1x_2=-\frac43b\qquad\text{és}\qquad(x_1+2)+(x_2+2)=a^2,(x_1+2)(x_2+2)=-2ab.$$

Innen $-3a+4=a^2$, tehát $a=1$ vagy $a=-4$ és $-\dfrac43b-6a+4=-2ab$, ahonnan $(3a-2)(b-3)=0$. Innen $b=3$. Az első esetben az egyenletek $x^2-x-6=0$, illetve $x^2+3x-4=0$, a gyökök $x_1=-2$, $x_2=3$, illetve -4, 1; a második esetben az egyenletek $x^2-16x+24=0$, illetve $x^2-12x-4=0$, a gyökök $x_1=8+2\sqrt{10}$, $x_2=8-2\sqrt{10}$, illetve $6+2\sqrt{10}$ és $6-2\sqrt{10}$.

7. Az egyenleteket $2\cos^3x=-\sin y$, illetve $2\sin^3x=-\cos y$ alakban írhatjuk. Emeljük négyzetre az egyenletek mindkét oldalát, majd adjuk össze az egyenleteket. Ekkor a $4(\sin^6x+\cos^6x)=1$ egyenletet kapjuk. Mivel $(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^3=1$, $\sin^2\alpha\cos^2\alpha=\dfrac14\sin^22\alpha$ és $\sin^22\alpha=\dfrac12(1-\cos4\alpha)$, ezért $4(\sin^6x+\cos^6x)=\dfrac52+\dfrac32\cos4x$, tehát $\dfrac52+\dfrac32\cos4x=1$, $\cos4x=-1$, $4x=\pi+2k\pi$, $x=\dfrac\pi4+\dfrac{k\pi}{2}$, $k\in\mathbf{Z}$.

a) Ha $x_1=\dfrac\pi4$, akkor $\sin y=-\dfrac{1}{\sqrt2}$ és $\cos y=-\dfrac{1}{\sqrt2}$, $y_1=\dfrac{5\pi}{4}$;

b) ha $x_2=\dfrac{3\pi}{4}$, akkor $\sin y=\dfrac{1}{\sqrt2}$ és $\cos y=-\dfrac{1}{\sqrt2}$, $y_2=\dfrac{5\pi}{4}$;

$c)$ ha $x_3 = \dfrac{5\pi}{4}$, akkor $y_3 = \dfrac{\pi}{4}$;

$d)$ ha $x_4 = \dfrac{7\pi}{4}$, akkor $y_4 = \dfrac{7\pi}{4}$.

8. Mivel $AB = 10$, azért a hozzá tartozó m_c magasság 8 egység, hiszen $\dfrac{10m_c}{2} = 40$. Az AB egyenes egy irányvektora $\mathbf{v}(8;6)$, egy normálvektora $\mathbf{n}(3;-4)$. A keresett C csúcspont a B ponttól $4\sqrt{5}$ egységre van, így rajta van az $(x+1)^2 + (y-3)^2 = 80$ egyenletű körön, és a BC egyenestől 8 egység távolságra van, így rajta van a $3x - 4y + k = 0$ egyenletű egyenesen is, amely a $B(-1;3)$ ponttól 8 egységre van. Így $8 = \dfrac{|-3-12+k|}{\sqrt{3^2+4^2}}$, ahonnan $k = 55$ vagy $k = -25$.

A feltételeknek négy C pont felel meg.

A $3x - 4y + 55 = 0$ egyenletű egyenes és az $(x+1)^2 + (y-3)^2 = 80$ egyenletű kör metszéspontjai: $C_1(-9;7)$, $C_2(-2,6;11,8)$, a $3x - 4y - 25 = 0$ egyenletű egyenes és az $(x+1)^2 + (y-4)^2 = 80$ egyenletű kör metszéspontjai: $C_3(7;-1)$, $C_4\left(\dfrac{3}{5};-\dfrac{29}{5}\right)$.

Rábai Imre