Gallai Tibor professzor úr emlékére

*[1] Ajánljuk, hogy a mérőlapok feladatait tanári segítséggel dolgozzák fel a diákok, a feladatokat megoldás után beszéljék meg órán vagy szakkörön.

1. Egy mértani sorozat első, harmadik és ötödik tagjának összege 126, a második és a negyedik tag összege a hányados 30-szorosa. Számítsa ki a sorozat első tagját és hányadosát.

2. Igazolja, hogy ha $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ és $a + b + c = 3$, akkor

$$\sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1} < 9.$$

3. Az $ABCD$ téglalapban $AB = 20$, $BC = 10$ egység. A téglalapon belül található olyan P pont, amelyből az AB és AD szakaszok $90°$-os szögben látszanak. Számítsa ki P pont távolságát a téglalap csúcsaitól.

4. Oldja meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán:
a) $\log_3(x-1)^2 + \log_3(x+2)^2 = 2\log_3 2$;
b) $\log_3(x-1)^2 + 2\log_3(x+2) = 2\log_3 2$;
c) $2\log_3(x-1) + \log_3(x+2)^2 = 2\log_3 2$;
d) $2\log_3(x-1) + 2\log_3(x+2) = \log_3 4$.

5. Egy háromszög oldalai a, b, c. Területe $T = \dfrac{\sqrt{3}}{4}(c^2 - a^2 - b^2)$.
Fejezze ki a-val és b-vel a háromszög köré írt kör sugarát!

6. Az $x^2 - a^2x - 2ab = 0$ egyenlet gyökei 2-vel nagyobbak az $x^2 + 3ax - \dfrac{4}{3}b = 0$ egyenlet gyökeinél. Számítsa ki a és b értékét, valamint az egyenlet gyökeit.

7. Határozza meg azokat a valós $(x; y)$ számpárokat, amelyekre $0 \le x \le 2\pi$, $0 \le y \le 2\pi$, és kielégítik a

$$2\cos^3 x + \sin y = 0, 2\sin^3 x + \cos y = 0$$

egyenletrendszert.

8. Az ABC háromszög két csúcspontja $A(7; 9)$ és $B(-1; 3)$, $BC = 4\sqrt{5}$ egység, a háromszög területe 40 területegység. Számítsa ki a C csúcs koordinátáit.

Rábai Imre

---

[1]