A hagyományoknak megfelelően idén is közöljük a nyári matematikai diákolimpia feladatainak a megoldását úgy, ahogyan a legilletékesebbek, a magyar csapat tagjai leírták. Közreműködésüket köszönjük, és ezúton is gratulálunk eredményeikhez.

A szerk.

IMO 2000 KOREA 제41회 국제수학 올림피아드
The 41st International Mathematical Olympiad

1. *A Γ_1 és Γ_2 körök az M és N pontokban metszik egymást.*

Legyen ℓ a Γ_1 és Γ_2 köröknek az a közös érintője, amelyre teljesül, hogy M közelebb van ℓ-hez, mint N. Érintse ℓ Γ_1-et az A és Γ_2-t a B pontban. Legyen az M-en átmenő, ℓ-lel párhuzamos egyenes másik metszéspontja a Γ_1 körrel C, a Γ_2 körrel pedig D.

A CA és DB egyenesek metszéspontja legyen E; az AN és CD egyenesek metszéspontja legyen P; a BN és CD egyeneseké pedig legyen Q.

Bizonyítsuk be, hogy $EP = EQ$.

Megoldás. Tekintsük az *ábrát*, jelölje F az AB és MN egyenesek metszéspontját. Mivel F rajta van az MN hatványvonalon, az F pontból a Γ_1 és Γ_2 körökhöz húzott érintőszakaszok hossza egyenlő. Ezek az érintőszakaszok az FA, illetve FB, így $FA = FB$.

1. ábra

Továbbá a párhuzamos szelők tétele szerint ($PQ \parallel AB$):

$$\frac{MP}{MQ} = \frac{FA}{FB} = 1, \qquad \text{vagyis} \qquad MP = MQ.$$

Másrészt, $AB \parallel CD$ miatt $EAB\sphericalangle = ECD\sphericalangle$, valamint a kerületi és érintőszárú kerületi szögek egyenlőségéből $ECD\sphericalangle = BAM\sphericalangle$. Következésképpen $EAB\sphericalangle = BAM\sphericalangle$, és hasonlóan kapjuk, hogy $EBA\sphericalangle = ABM\sphericalangle$.

Ezekből viszont az következik, hogy az $AMBE$ négyszög deltoid. Emiatt $EM \perp AB$, azaz $EM \perp PQ$. És ezzel készen vagyunk, ugyanis az EMP és EMQ derékszögű háromszögek EM befogója közös, és a másik befogójuk is egyenlő ($MP = MQ$). Tehát egybevágó a két háromszög, amiből $EP = EQ$.

Harangi Viktor (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 10., o.t.)

2. *Legyenek a, b, c olyan pozitív valós számok, amelyekre $abc = 1$ teljesül. Bizonyítsuk be, hogy*

$$\left(a - 1 + \frac{1}{b}\right)\left(b - 1 + \frac{1}{c}\right)\left(c - 1 + \frac{1}{a}\right) \le 1.$$

Megoldás. Ha a 3 szorzótényező közül egy vagy három negatív, akkor a szorzat negatív, vagyis kisebb 1-nél. Ha valamelyik tényező 0, akkor a szorzat is 0, szintén kisebb 1-nél. Pontosan két tényező nem lehet negatív, mert ha például $a - 1 + \frac{1}{b} < 0$ és $b - 1 + \frac{1}{c} < 0$ lenne, akkor az összegük

$$0 > a - 1 + \frac{1}{b} + b - 1 + \frac{1}{c} = \left(b - 2 + \frac{1}{b}\right) + a + \frac{1}{c} = \frac{(b-1)^2}{b} + a + \frac{1}{c} > 0,$$

mert a, b, $c > 0$, ez nem lehet.

Tehát az az eset marad, amikor mindhárom szorzótényező pozitív.

$$\left(a - 1 + \frac{1}{b}\right)\left(b - 1 + \frac{1}{c}\right) = ab - a + \frac{a}{c} - b + 1 - \frac{1}{c} + 1 - \frac{1}{b} + \frac{1}{bc} =$$
$$= \frac{1}{c} - a + \frac{a}{c} - b + 1 - \frac{1}{c} + 1 - \frac{1}{b} + a = \frac{a}{c} - b + 2 - \frac{1}{b} = \frac{a}{c} - \frac{(b-1)^2}{b} \le \frac{a}{c},$$

ugyanígy a másik 2-2 tényezőre. Mindhárom tényező pozitív, tehát

$$\left(a - 1 + \frac{1}{b}\right)\left(b - 1 + \frac{1}{c}\right)\left(c - 1\frac{1}{a}\right) =$$
$$= \sqrt{\left(a - 1 + \frac{1}{b}\right)\left(b - 1 + \frac{1}{c}\right)}\sqrt{\left(b - 1 + \frac{1}{c}\right)\left(c - 1 + \frac{1}{a}\right)}\sqrt{\left(c - 1 + \frac{1}{a}\right)\left(a - 1 + \frac{1}{b}\right)} \le$$
$$\le \sqrt{\frac{a}{c}}\sqrt{\frac{b}{a}}\sqrt{\frac{c}{b}} = 1,$$

ezt akartuk bizonyítani.

Győri Nikolett (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 12. o.t.)

3. *Legyen $n \ge 2$ pozitív egész szám. A kiinduló állásban n bolha ül egy vízszintes egyenesen, nem mind ugyanabban a pontban.*

Egy λ pozitív valós számra definiáljunk egy lépést a következőképpen:

válasszunk ki két bolhát, amelyek az A és B pontokban ülnek, ahol A balra van B-től;

ugorjon az A-n lévő bolha az egyenesnek abba a C pontjába, ami jobbra van B-től, és amelyre $BC/AB = \lambda$ teljesül. Határozzuk meg az összes olyan λ értéket, amelyre teljesül, hogy akárhogyan választva az M pontot az egyenesen, és akárhogyan választva az n bolha kiindulási pozícióját, létezik lépéseknek egy olyan véges sorozata, amelyek végrehajtása után az összes bolha M-től jobbra helyezkedik el.

Megoldás. Az egyszerűség kedvéért nevezzük a bolhákat pontoknak. Először azt mutatjuk meg, hogy $\lambda \ge \frac{1}{n-1}$-re az állítás mindig igaz. Azt mutatjuk meg, hogy akármilyen messzire eljuthatnak a pontok, ha mindig a legbalra esővel átugorjuk a legjobbra esőt. Ebben az esetben egy mohó algoritmus eljuttatja a pontokat M-en túlra. Az első $n-1$ lépésben minden pont különböző helyre kerül, ezt tekinthetjük a továbbiakban kiindulóhelyzetnek. Jelölje itt a szomszédos pontok közötti távolságot rendre d_1, d_2, $\ldots$, d_{n-1}. Egy ugrás után az új távolságok: d_2, d_3, $\ldots$, d_{n-1}, $(d_1 + d_2 + \cdots + d_{n-1}) \cdot \lambda$. Mivel

$$(d_1 + d_2 + \cdots + d_{n-1}) \cdot \lambda \ge \frac{d_1 + d_2 + \cdots + d_{n-1}}{n-1} \ge \min(d_1,\ \ldots,\ d_{n-1}),$$

azért a legkisebb távolság változatlan marad. Jelölje ezt d. A legjobbra fekvő pont így minden lépésben legalább d-vel jobbra kerül. Mivel $d > 0$, azért egy idő után akármilyen messzire eljut. Ezután $n-1$ lépésben a többi pont is M-en túlra jut, és ezt akartuk bizonyítani.

Most megmutatjuk, hogy ha $\lambda < \frac{1}{n-1}$, akkor semelyik kiindulóhelyzetből sem lehet akármilyen messzire eljutni. Minden ponthoz rendeljünk hozzá ugyanis egy számot úgy, hogy az egyenest a számegyenesnek tekintjük. Legyen s_k

a k-adik lépés után a pontoknak megfelelő számok összege, w_k pedig a számok legnagyobbika. Nyilván $s_k \le n \cdot w_k$. Ha bebizonyítanánk, hogy w_k korlátos, akkor készen lennénk, mert így egy pont sem juthatna át egy bizonyos M-en (a korláton) túlra. Ugorja át A a $(k+1)$-edik lépésben B-t és ezzel kerüljön C-be. Az értelemszerű jelölésekkel ebből:

$$s_{k+1} = s_k + c - a, \qquad c - b = \lambda(b - a),$$

ezt átrendezve $\lambda(c-a) = (1+\lambda)(c-b)$. Tehát $s_{k+1} = s_k + \dfrac{1+\lambda}{\lambda}(c-b)$.

Most igazoljuk, hogy

$$s_{k+1} - s_k = \frac{1+\lambda}{\lambda}(c-b) \ge \frac{1+\lambda}{\lambda}(w_{k+1} - w_k).$$

$b \le w_k$, tehát ha $c \ge w_{k+1}$, akkor ez valóban igaz. Ha pedig $c < w_{k+1}$, akkor $w_{k+1} = w_k$, hiszen a legjobbra eső pont nem változhatott másra, mint c-re. Ekkor az egyenlőtlenség nyilvánvaló.

Tehát $s_{k+1} - s_k \ge \dfrac{1+\lambda}{\lambda}(w_{k+1} - w_k)$. Vagyis $\dfrac{1+\lambda}{\lambda} \cdot w_k - s_k \ge \dfrac{1+\lambda}{\lambda} w_{k+1} - s_{k+1}$.

Mivel $\lambda < \dfrac{1}{n-1}$, azért $1 + \lambda > n\lambda$, amiből $\dfrac{1+\lambda}{\lambda} - n > 0$. Legyen $\mu = \dfrac{1+\lambda}{\lambda} - n$. Ekkor

$$\frac{1+\lambda}{\lambda} \cdot w_k - s_k = \mu \cdot w_k + (n \cdot w_k - s_k) \ge \mu \cdot w_k,$$

Ezek szerint $w_k \le \dfrac{\frac{1+\lambda}{\lambda} \cdot w_1 - s_1}{\mu}$, tehát w_k korlátos, készen vagyunk.

Így a megoldás: $\lambda \ge \dfrac{1}{n-1}$.

Pálvölgyi Dömötör (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 12. o.t.)

4. *Egy bűvésznek száz kártyája van, amelyek 1-től 100-ig vannak számozva. Mindegyiket beleteszi három doboz – egy piros doboz, egy fehér doboz és egy kék doboz – valamelyikébe, olymódon, hogy mindegyik dobozban van legalább egy kártya.*

A közönség egy tagja kiválaszt kettőt a három doboz közül, és mindegyikből kivesz egy kártyát, majd kihirdeti a kivett kártyákon lévő két szám összegét. Ennek az összegnek az ismeretében a bűvész meg tudja mondani, hogy melyik az a doboz, amiből nem vettek ki kártyát.

Hányféleképpen lehet a kártyákat a dobozokban úgy elhelyezni, hogy ez a mutatvány mindig sikerüljön? (Két elhelyezést különbözőnek tekintünk, ha van legalább egy kártya, ami másik dobozba kerül.)

Megoldás. Legyen a három doboz A, B és C.

$$A = \{a_1 < a_2 < \cdots < a_k\}, B = \{b_1 < b_2 < \cdots < b_l\}, C = \{c_1 < c_2 < \cdots < c_m\}, \qquad (k + l + m = 100).$$

Vegyük a következő összegeket:

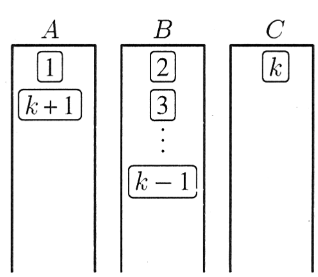
$$\{a_1 + b_1 < a_1 + b_2 < \cdots < a_1 + b_l < a_2 + b_l < \cdots < a_k + b_l\}\{a_1 + c_1 < a_1 + c_2 < \cdots < a_1 + c_m < a_2 + c_m < \cdots < a_k + c_m\}\{b_1 +$$

(az egyenlőtlenségek az eredeti egyenlőtlenségekből következnek).

Mivel két csoportban nem lehet ugyanolyan összeg, azért van $k+l-1+k+m-1+l+m-1 = 2(k+l+m)-3 = 197$ különböző számunk. Az 1–100 számokból éppen ennyi, 197 különböző kéttagú összeg készíthető $(1 + 2 = 3, \ldots 99 + 100 = 199)$, ezért az összes szám szerepel. Ezután esetvizsgálattal nézzük meg a lehetőségeket:

Kezdjük feltölteni a dobozokat. Vegyük észre, hogy mivel a 3 összeg létrejön, az 1 és a 2 kártya különböző dobozokba kerül. Ezt a két kártyát összesen hatféleképpen rendezhetjük el. Tegyük fel, hogy az 1 kártya az A, a 2 pedig a B dobozba került. A 3 kártya ezután nem kerülhet az A dobozba, ellenkező esetben ugyanis a 4 összeg nem jöhet létre. A 3 kártya tehát vagy a B dobozba került – ahová a 2 – vagy pedig az eddigi üres C dobozba. Azt állítjuk, hogy a további kártyák elhelyezése mindkét esetben egyértelmű.

1. eset (a 3 kártya a B dobozba kerül):

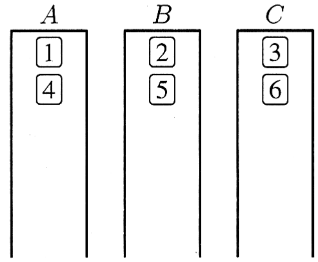


2. ábra

• a C doboz nem üres, így legyen a legkisebb C-beli kártya k. Ekkor $k+1$ csak az A-ba kerülhet, hiszen különben $2+k=(k+1)+1$, a bűvész nem tud dönteni.

Ám ekkor $(k+1)+2=k+3$, a bűvész most sem tud dönteni, hacsak $k+1$ kártya már egyáltalán nincsen. Így „nem létezhet” $k+1$, tehát $k=100$. Ekkor az A és C dobozban egy-egy kártya van, az 1, illetve a 100, a többiek a B dobozba kerülnek. Ez az elrendezés pedig nyilván megfelelő, így tehát hat esetet kaptunk.

2. eset (a 3 kártya a C dobozba kerül):



3. ábra

•$2+3=4+1$, $4\in A$

$5+1=4+2$ tehát $5\notin C$, és $5+2=4+3$, tehát $5\notin A$. Így $5\in B$. Hasonlóan

$6+1=4+3$, így $6\notin B$, továbbá $6+2=5+3$, azért $6\notin A$. Így csak $6\in C$ lehetséges.

Az első sort elhagyva ezt „eljátszva” a második sorral kapjuk, hogy a számok 3-as maradék szerint vannak rendezve, és ez az elrendezés is tényleg jó lesz. Ez tehát további hat eset.

Így összesen 12 olyan elrendezés van, amikor mindig sikerülhet a mutatvány.

Vizer Máté (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 12. o.t.)

5. *Döntsük el, hogy létezik-e olyan n pozitív egész szám, amelyre teljesül, hogy n pontosan 2000 különböző prímszámmal osztható, és 2^n+1 osztható n-nel.*

Megoldás. Belátjuk, hogy minden pozitív egész k-hoz található olyan pozitív egész n úgy, hogy (2^n+1) osztható n-nel, és n-nek pontosan k darab prímosztója van.
(Így $k=2000$-re is létezik ilyen n.)

k szerinti teljes indukcióval bizonyítjuk az állítást. $k=1$-re igaz: $9\mid 2^9+1$.

$k=2$-re: $9\cdot 19\mid 2^{9\cdot 19}+1$.

Tegyük fel, hogy k-ra igaz ($k\geq 2$):

$$p_1^2p_2p_3\dots p_k\mid 2^{p_1^2p_2p_3\dots p_k}+1,\qquad p_1=3<p_2=19<p_3<\dots<p_k.$$

Segédtétel. *Ha $p>3$ prím, akkor (2^p+1)-nek van p-nél nagyobb prímosztója.*

Bizonyítás. Legyen a q a (2^p+1)-nek egy p-nél nem nagyobb prímosztója. Ekkor $q>2$ és

$$2^p\equiv -1 \pmod q.\qquad \text{Négyzetre emelve}\qquad 2^{2p}\equiv 1 \pmod q.$$

A kis Fermat-tétel szerint $2^{q-1}\equiv 1 \pmod q$. Innen az euklideszi algoritmus alkalmazásával kapjuk, hogy $2^{(2p,\,q-1)}\equiv 1 \pmod q$. $p\not| q-1$, mert $q-1<p$, így $(2p,\ q-1)=2$

$$2^2=4\equiv 1\pmod q,\qquad \text{tehát} q=3.$$

Másrészt $9\not| 2^p+1$, mert egyébként $2^{2p}\equiv 1 \pmod 9$ és $2^6\equiv 1 \pmod 9$ miatt $2^{(6,\,2p)}\equiv 1 \pmod 9$ az euklideszi algoritmus miatt, ami $2^2\equiv 1 \pmod 9$, és ez ellentmondás.

Ha tehát (2^p+1)-nek nincs p-nél nagyobb prímosztója, akkor $2^p+1\leq 3$, ami ellentmondás. Ezzel a segédtételt beláttuk.

Legyen ezután p_{k+1} a segédtétel szerinti prím, tehát $p_{k+1}>p_k$, és $p_{k+1}\mid 2^{p_k}+1$.

$$2^{p_k}\equiv -1\pmod{p_{k+1}},\qquad \text{és így} 2^{p_1^2p_2p_3\dots p_kp_{k+1}}\equiv(-1)^{p_1^2p_2p_3\dots p_{k-1}p_{k+1}}=-1\pmod{p_{k+1}},\qquad \text{azaz} p_{k+1}\mid 2^{p_1^2p_2p_3\dots p_kp_{k+1}}+1.$$

Másrészt az indukciós feltevés miatt $p_1^2p_2\dots p_k\mid 2^{p_1^2p_2\dots p_k}+1$, tehát

$$2^{p_1^2p_2\dots p_k}\equiv -1\pmod{p_1^2p_2\dots p_k}.2^{p_1^2p_2\dots p_kp_{k+1}}\equiv(-1)^{p_{k+1}}=-1\pmod{p_1^2p_2\dots p_k}.p_1^2p_2\dots p_kp_{k+1}\mid 2^{p_1^2p_2\dots p_kp_{k+1}}+1,$$

mert $p_1^2\cdot p_2\cdot\dots\cdot p_k$ és p_{k+1} relatív prímek. Így $k+1$-re $n=p_1^2\cdot p_2\cdot\dots\cdot p_k\cdot p_{k+1}$ megfelelő, amivel az indukciós bizonyítást befejeztük.

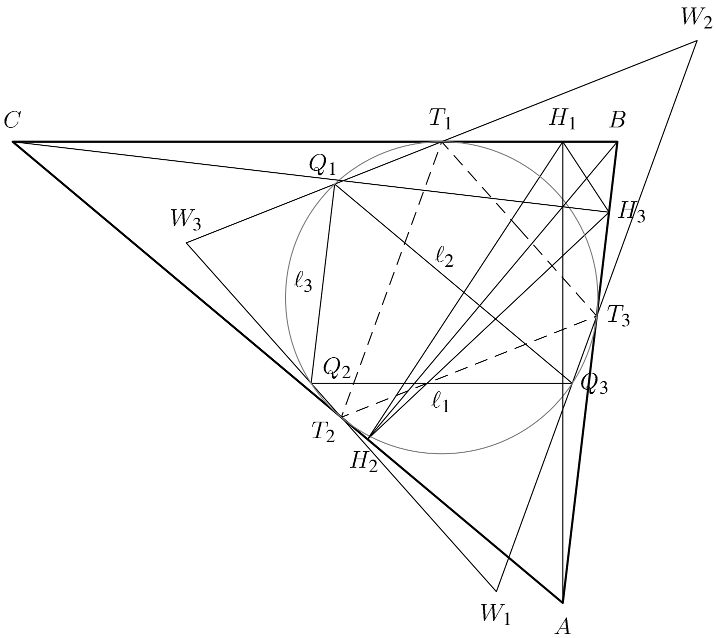
Zábrádi Gergely (Győr, Révai M. Gimn., 12. o.t.)

6. *Legyenek AH_1, BH_2, CH_3 az ABC hegyesszögű háromszög magasságai. Az ABC háromszög beírt köre a BC, CA, AB oldalakat rendre a T_1, T_2, T_3 pontokban érinti. Legyenek az ℓ_1, ℓ_2, illetve ℓ_3 egyenesek a H_2H_3, H_3H_1, illetve H_1H_2 egyenesek tükörképei a T_2T_3, T_3T_1, illetve T_1T_2 egyenesekre.*

Bizonyítsuk be, hogy ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 egy olyan háromszöget határoznak meg, amelynek csúcsai az ABC háromszög beírt körén vannak.

Megoldás. Legyen $1 \le i < j \le 3$ esetén $\ell_i \cap \ell_j = Q_k$, ahol $\{i,\ j,\ k\} = \{1,\ 2,\ 3\}$. Belátjuk, hogy pl. Q_1Q_2 egyenese és AB egyenese párhuzamos. Ez éppen azt jelenti, hogy $\ell_3 \parallel AB$.

Irányított szögekkel fogunk számolni. $CAB\sphericalangle = \alpha$, $ABC\sphericalangle = \beta$, $BCA\sphericalangle = \gamma$. H_1H_2-t BC-be[1] $(-\alpha)$ szögű forgatás viszi ($H_2H_1C\sphericalangle = CAB\sphericalangle$, mert H_1H_2AB négyszög húrnégyszög: H_1 és H_2 rajta van az AB szakasz Thálesz-körén.)



4. ábra

T_1T_2-t $\left(-\dfrac{\pi-\gamma}{2}\right)$ szögű forgatás viszi BC-be (a CT_1T_2 háromszög egyenlő szárú), így H_1H_2-t T_1T_2-be $(-\alpha) - \left(-\dfrac{\pi-\gamma}{2}\right)$ szögű forgatás viszi. H_1H_2-t ℓ_3-ba ennek kétszerese, $-2\alpha - (-\pi + \gamma) = \pi - 2\alpha - \gamma$ szögű forgatás viszi. Így ℓ_3-at BC-be $-(\pi - 2\alpha - \gamma) + (-\alpha) = -\pi + \alpha + \gamma = -\beta$ szögű forgatás viszi, amivel állításunkat igazoltuk.

A Q_iT_i $(i = 1,\ 2,\ 3)$ egyenesek a $W_1W_2W_3$ háromszöget határozzák meg.

Ezután a következőket látjuk be:

*(i)*A $W_1W_2W_3$ háromszög talpponti háromszöge a $Q_1Q_2Q_3$ háromszög.

*(ii)*A $W_1W_2W_3$ háromszög középvonalai a $T_1T_2T_3$ háromszöget adják.

(i) Egyszerűen adódik, hogy pl.: $H_1H_2B\sphericalangle = BH_2H_3\sphericalangle = \dfrac{\pi}{2} - \beta$, ezért T_2 távolsága H_2H_1-től és H_2H_3-tól megegyezik. T_2 távolsága H_2H_1-től és ℓ_3-tól, illetve H_2H_3-tól és ℓ_1-től is ugyanakkora, azaz T_2 egyenlő távolságra van Q_2Q_1 és Q_2Q_3-tól, így Q_2T_2 a $Q_1Q_2Q_3\sphericalangle$ külső szögfelezője. Hasonló áll Q_3T_3 és Q_1T_1 esetén is. Emiatt *(i)* valóban fennáll.

(ii) Belátjuk, hogy pl. T_1T_2 egyenese párhuzamos W_1W_2 egyenesével, azaz Q_3T_3-mal. *(i)* miatt Q_3T_3 a $Q_2Q_3Q_1$ szög külső szögfelezője, így mivel a $Q_1Q_2Q_3$ háromszög és az ABC háromszög egyállású és $Q_2Q_3Q_1\sphericalangle = BCA\sphericalangle$, Q_3T_3-at Q_3Q_2-be $\left(-\dfrac{\pi-\gamma}{2}\right)$ szögű forgatás viszi. De láttuk, hogy T_1T_2-t BC-be is $\left(-\dfrac{\pi-\gamma}{2}\right)$ szögű forgatás viszi. Tehát mivel BC és Q_3Q_2 párhuzamosak, T_1T_2 is párhuzamos Q_3T_3-mal.

Így a Q_1, Q_2, Q_3, H_1, H_2, H_3 pontok rajta vannak a $W_1W_2W_3$ háromszög Feuerbach-körén, azaz egy körön vannak. Mivel a H_1, H_2, H_3 pontok éppen az ABC háromszög beírt körét határozzák meg, a bizonyítással készen vagyunk.

Gyenes Zoltán (Apáczai Cs. J. Gimn., 12. o.t.)

[1]Itt és a továbbiakban a szakaszok által meghatározott egyenesek forgatásáról van szó.
A szerk.