**Első nap**

**1.** A $\Gamma_1$ és $\Gamma_2$ körök az $M$ és $N$ pontokban metszik egymást.

Legyen $\ell$ a $\Gamma_1$ és $\Gamma_2$ köröknek az a közös érintője, amelyre teljesül, hogy $M$ közelebb van $\ell$-hez, mint $N$. Érintse $\ell$ $\Gamma_1$-et az $A$ és $\Gamma_2$-t a $B$ pontban. Legyen az $M$-en átmenő, $\ell$-lel párhuzamos egyenes másik metszéspontja a $\Gamma_1$ körrel $C$, a $\Gamma_2$ körrel pedig $D$.

A $CA$ és $DB$ egyenesek metszéspontja legyen $E$; az $AN$ és $CD$ egyenesek metszéspontja legyen $P$; a $BN$ és $CD$ egyeneseké pedig legyen $Q$.

Bizonyítsuk be, hogy $EP = EQ$.

**2.** Legyenek $a$, $b$, $c$ olyan pozitív valós számok, amelyekre $abc = 1$ teljesül. Bizonyítsuk be, hogy

$$\left(a - 1 + \frac{1}{b}\right)\left(b - 1 + \frac{1}{c}\right)\left(c - 1 + \frac{1}{a}\right) \leq 1.$$

**3.** Legyen $n \geq 2$ pozitív egész szám. A kiinduló állásban $n$ bolha ül egy vízszintes egyenesen, nem mind ugyanabban a pontban.

Egy $\lambda$ pozitív valós számra definiáljunk egy *lépést* a következőképpen:

válasszunk ki két bolhát, amelyek az $A$ és $B$ pontokban ülnek, ahol $A$ balra van $B$-től;

ugorjon az $A$-n lévő bolha az egyenesnek abba a $C$ pontjába, ami jobbra van $B$-től, és amelyre $BC/AB = \lambda$ teljesül.
Határozzuk meg az összes olyan $\lambda$ értéket, amelyre teljesül, hogy akárhogyan választva az $M$ pontot az egyenesen, és akárhogyan választva az $n$ bolha kiindulási pozícióját, létezik lépéseknek egy olyan véges sorozata, amelyek végrehajtása után az összes bolha $M$-től jobbra helyezkedik el.

**Második nap**

**4.** Egy bűvésznek száz kártyája van, amelyek 1-től 100-ig vannak számozva. Mindegyiket beleteszi három doboz – egy piros doboz, egy fehér doboz és egy kék doboz – valamelyikébe, olymódon, hogy mindegyik dobozban van legalább egy kártya.

A közönség egy tagja kiválaszt kettőt a három doboz közül, és mindegyikből kivesz egy kártyát, majd kihirdeti a kivett kártyákon lévő két szám összegét. Ennek az összegnek az ismeretében a bűvész meg tudja mondani, hogy melyik az a doboz, amiből nem vettek ki kártyát.

Hányféleképpen lehet a kártyákat a dobozokban úgy elhelyezni, hogy ez a mutatvány mindig sikerüljön? (Két elhelyezést különbözőnek tekintünk, ha van legalább egy kártya, ami másik dobozba kerül.)

**5.** Döntsük el, hogy létezik-e olyan $n$ pozitív egész szám, amelyre teljesül, hogy $n$ pontosan 2000 különböző prímszámmal osztható, és $2^n + 1$ osztható $n$-nel.

**6.** Legyenek $AH_1$, $BH_2$, $CH_3$ az $ABC$ hegyesszögű háromszög magasságai. Az $ABC$ háromszög beírt köre a $BC$, $CA$, $AB$ oldalakat rendre a $T_1$, $T_2$, $T_3$ pontokban érinti. Legyenek az $\ell_1$, $\ell_2$, illetve $\ell_3$ egyenesek a $H_2H_3$, $H_3H_1$, illetve $H_1H_2$ egyenesek tükörképei a $T_2T_3$, $T_3T_1$, illetve $T_1T_2$ egyenesekre.

Bizonyítsuk be, hogy $\ell_1$, $\ell_2$, $\ell_3$ egy olyan háromszöget határoznak meg, amelynek csúcsai az $ABC$ háromszög beírt körén vannak.

*Még néhány szó az olimpiáról*

A Nemzetközi Matematikai Diákolimpián további négy magyar diák is eredményesen szerepelt, mindegyikük részt vett és jó helyezést is ért el a KöMaL elmúlt tanévi pontversenyében.

*Kunszenti-Kovács Dávid*, a *norvég* csapat legjobbja 16 ponttal bronzérmet, *Keszegh Balázs*, a *szlovák* csapat legeredményesebb versenyzője 25 ponttal ezüstérmet szerzett. *Koch Dénes* az *osztrák* csapat tagjaként 11 ponttal bronzérmet, *Tóth Ferenc*, az *ukrán* csapatból egy feladat teljes megoldásáért dicséretet kapott.

Mindannyiuknak gratulálunk!

*a Szerk.*