1. Az $A=\operatorname{tg}(0\cdot 12^\circ)+\operatorname{tg}(1\cdot 12^\circ)+\dots+\operatorname{tg}(15\cdot 12^\circ)$ 16-tagú összeg első és utolsó tagja 0. Továbbá

$$\operatorname{tg}(k\cdot 12^\circ)=\operatorname{tg}(180^\circ-k\cdot 12^\circ)=-\operatorname{tg}(15\cdot 12^\circ-k\cdot 12^\circ)=\operatorname{tg}\left((15-k)\cdot 12^\circ\right),$$

ahol k lehetséges értékei 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Így $A=0$.

A B kiszámításához próbáljuk meg a $(6\sqrt{3}-10)$-et egy kéttagú kifejezés köbeként felírni. Célszerű a kéttagú kifejezést $a+\sqrt{3}$ alakban keresni: $(a+\sqrt{3})^3=a^3+3a^2\cdot\sqrt{3}+3a\cdot 3+3\sqrt{3}$. Ebből $(3a^2+3)\cdot\sqrt{3}=6\sqrt{3}$, tehát $a^2=1$, továbbá $a^3+9a=-10$, ami $a^2=1$ miatt $10a=-10$, vagyis $a=-1$. Eszerint:

$B=\sqrt[3]{6\cdot\sqrt{3}-10}=\sqrt[3]{(\sqrt{3}-1)^3}=\sqrt{3}-1\approx 0,73.$

$C=\log_2\sqrt{\dfrac{2}{a}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{a}{2}\cdot\sqrt[4]{\dfrac{a^8}{32}}}}=\log_2\sqrt[6]{\sqrt[4]{\dfrac{4^4\cdot a^8}{a^8\cdot 32}}}=\log_2\sqrt[24]{8}=\log_2 2^{\frac{1}{8}}=0,125.$

Az a értékétől függetlenül megkaptuk C-t. A növekvő sorrend: A, C, B.

2. Az ABE háromszögben FG középvonal, FGD háromszögben HI középvonal, HIC háromszögben KJ középvonal, ezért $AB=2\cdot FG=4\cdot HI=8\cdot KJ$, így $JK:AB=1:8$.

3. Mivel

$$\frac{x^2-2000x+1999}{x-1}=\frac{(x-1999)(x-1)}{x-1}\qquad\text{és}\qquad\frac{x^2-1999x+1998}{x-1}=\frac{(x-1998)(x-1)}{x-1},$$

azért az $x\neq 1$ kikötéssel az egyenlet a következő alakban írható: $\sqrt{2000-x}+\sqrt{x-1999}=1$. A négyzetgyökök miatt $2000-x\geq 0$ és $x-1999\geq 0$, vagyis $1999\leq x\leq 2000$. Ezen az intervallumon csak két egész szám van, 1999 és 2000, amelyek megoldásai az egyenletnek.

4. Ha a kör középpontja illeszkedik a parabola tengelyére, akkor csak úgy lehet három közös pontjuk, ha az egyik a parabola tengelypontja. Legyen ez a háromszög C csúcsa. A parabola egyenletét írjuk $(y-3)^2=x-2$ alakban, ezért $C(2;3)$. A szabályos háromszögnek a tengely felett lévő pontja legyen $A(a;b)$, ez a pont illeszkedik a parabolára, ezért $a=b^2-6b+11$. Az AC egyenes irányszöge 30°, így $\operatorname{tg}30^\circ=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{b-3}{b^2-6b+11-2}=\dfrac{1}{b-3}$, vagyis $b=3+\sqrt{3}$, $a=5$.

A szabályos háromszög oldalának hossza: $AC=\sqrt{(5-2)^2+(3+\sqrt{3}-3)^2}=\sqrt{12}$, a magassága $m=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{12}=3$, a köréírt kör sugara pedig $r=\dfrac{2}{3}\cdot m=2$. Ezek alapján a kör középpontja: $K(4;3)$. A keresett kör egyenlete: $(x-4)^2+(y-3)^2=4$.

5. Alakítsuk át a feltételeket: $(x^2-y)(x-y)=0$, $(x-2)^2+(y-1)^2\leq 9$. Vagyis azokat a rácspontokat keressük, amelyek illeszkednek az $y=x^2$ egyenletű parabolára vagy az $y=x$ egyenletű egyenesre és a $K(2;1)$ középpontú, $r=3$ sugarú, zárt körlemezen vannak.

A megfelelő pontok: $(-1;1)$, $(0;0)$, $(1;1)$, $(2;4)$, $(2;2)$, $(3;3)$.

6. Legyen a bevásárlóközpont egy évvel ezelőtti bevétele egységnyi, a vásárlók száma v, akkor az egy főre jutó vásárlás $\dfrac{1}{v}$. Ha a vásárlók száma p százalékkal nő, akkor az idén $v\left(1+\dfrac{p}{100}\right)$ a vásárlók létszáma, a megnövekedett egy főre futó vásárlás pedig $\dfrac{1}{v}\left(1+\dfrac{4p}{100}\right)$. Az új, megnövekedett bevétel ezek alapján $v\left(1+\dfrac{p}{100}\right)\dfrac{1}{v}\left(1+\dfrac{4p}{100}\right)=1,54$. A műveleteket elvégezve és rendezve $4p^2+500p-5400=0$. Az egyenlet pozitív gyöke jöhet csak szóba, és ez $p=10$, a vásárlók száma 10 százalékkal növekedett.

7. Írjuk fel a diszkrimináns negyedét:

$$\frac{D}{4}=b^2(a+c)^2-(a^2+b^2+c^2)\cdot 2ac=a^2b^2+2ab^2c+b^2c^2-2a^3c-2ab^2c-2ac^3=$$
$$=b^2\cdot(a^2+c^2)-2ac\cdot(a^2+c^2)=(b^2-2ac)\cdot(a^2+c^2).$$

a és c különböző előjelű valós számok, azért $b^2-2ac>0$, $a^2+c^2>0$, így $D>0$. Ezzel megmutattuk, hogy az egyenletnek van két különböző valós gyöke.

Ha $x=0$, akkor a helyettesítési érték $2ac$, vagyis negatív, ha $x=1$, akkor a helyettesítési érték $(a^2+b^2+c^2)-2b(a+c)+2ac$. Ezt $(a-b+c)^2$ alakban is írhatjuk, ami pozitív, mert $a+c\neq b$. Ebből látható, hogy az egyik gyök a $(0;1)$ intervallumban van. Ez biztosan a nagyobbik gyök, mert a két gyök szorzata $\dfrac{2ac}{a^2+b^2+c^2}$, negatív, a másik gyök tehát negatív.

8. Legyen az A-nál lévő belső szög α, ekkor $AC=\cos\alpha$. Írjuk fel a területet:

$$T=t_{ACE}+t_{ABG}+t_{ABC}+t_{AEG}=\frac{\cos^2\alpha}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1\cdot\cos\alpha\cdot\sin\alpha}{2}+\frac{1\cdot\cos\alpha\cdot\sin(180^\circ-\alpha)}{2}.T=\frac{\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha+1}{2}=\frac{1+\cos}{2}$$

Legyen $2\alpha = x$, és vizsgáljuk az $f(x) = 2\sin x + \cos x$ függvényt, keressük meg a maximumhelyét a $(0; 180^\circ)$ intervallumon:

$$2\sin x + \cos x = \sqrt{5}\left(\sin x \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} + \cos x \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}\right) \approx$$
$$\approx \sqrt{5}(\sin x \cos 26,6^\circ + \cos x \sin 26,6^\circ) = \sqrt{5}\sin(x + 26,6^\circ).$$

Vagyis $x \approx 63,4^\circ$, így $\alpha \approx 31,7^\circ$.

Számadó László