2000. február 26.

IX. osztály

1. a) Oldjátok meg az $x^2 + y^2 = xy + 2000$ egyenletet az egész számok halmazában!
b) Az a, b és c, nullától különböző valós számok összege nulla. Bizonyítsátok be, hogy

$$\frac{a^2}{a^2-b^2-c^2} + \frac{b^2}{b^2-c^2-a^2} + \frac{c^2}{c^2-a^2-b^2} = \frac{3}{2}.$$

Kacsó Ferenc és Bege Antal

2. Az ABC háromszöglapot az *ábrán* látható három összefutó egyenes hat kisebb háromszögre bontja. Közülük négy háromszög területének mérőszámát az ábrán feltüntettük. Határozzátok meg az ABC háromszög területét!

3. Az $ABCD$ négyzet oldalain mozog az M és a P pont. Ha O a négyzet középpontja, határozzátok meg az $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OP}$ összegvektor végpontjainak mértani helyét az alábbi esetekben:

a) az M pont az AB, a P pont pedig a CD zárt szakaszon mozog, egymástól függetlenül;
b) a két pont a négyzet oldalain mozog, tetszőlegesen, egymástól függetlenül (egymásra is kerülhetnek).

András Szilárd

4. Egy 3×3-as négyzetháló 1×1-es mezőjét feketére festjük oly módon, hogy minden sorban és minden oszlopban legyen legalább egy befestett mező. Hány különböző ilyen színezés lehetséges? A szimmetrikus és egymásba forgatással átvihető eseteket is különbözőnek tekintjük, például az alábbi színezések különbözőek:

X. osztály

1. a) Oldjátok meg a

$$4^x + 15^x = 10^x + 9^x$$

egyenletet a valós számok halmazában.
b) Bizonyítsátok be, hogy ha a, b és c 1-nél nagyobb valós számok, akkor

$$\log_b\left(b - a + \frac{a^2}{b}\right) \cdot \log_c\left(c - b + \frac{b^2}{c}\right) \cdot \log_a\left(a - c + \frac{c^2}{a}\right) \geq 1.$$

2. Az $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény teljesíti az $f(f(x)) = x^{2n+1} + \alpha x$ egyenlőséget bármely $x \in \mathbf{R}$ esetén, ahol n pozitív egész és $\alpha \in (0,\ 1)$ rögzített számok. Igazoljátok, hogy léteznek olyan a, b és c, páronként különböző valós számok, amelyekre

$$f(a) + f(b) + f(c) = 0.$$

Bencze Mihály

3. Az $ABCD$ téglalap oldalain léteznek olyan $M \in BC$ és $N \in CD$ pontok, amelyekre az AMN háromszög egyenlő oldalú.
a) Határozzátok meg a $\dfrac{BC}{AB}$ arány minimális és maximális értékét!
b) Igazoljátok, hogy $T(ABM) + T(ADN) = T(MNC)$.

Dáné Károly

4. Egy szabályos tízszög csúcsaiba elhelyezzük az 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25 és 28 számokat valamilyen sorrendben. Tételezzük fel, hogy lerajzoltuk az összes lehetséges sorrendnek megfelelő tízszöget (a számokkal együtt). Minden ilyen tízszög belsejébe beírjuk a legnagyobb olyan összeg értékét, amelyet három szomszédos csúcsába írt szám összeadásával nyerhetünk. Határozzátok meg a tízszögek belsejében található számok közül a legkisebbet!