*Mint ismeretes, sárkányok nincsenek. Ez a primitív megállapítás talán kielégíti az egyszerű elmét, de nem a tudományt... Elég az hozzá, hogy a zseniális Cerebron, egzakt módszerekkel boncolgatva a problémát, a sárkányok három faját fedezte fel: a nullás, az imaginárius és a negatív sárkányokat. Mindezek, amint már említettük, nem léteznek, de mindegyik fajta egészen másképpen nem létezik.* [1]

*Stanisław Lem:* Kiberiáda
(Harmadik utazás avagy a valószínűségi sárkányok)

## A fogoly

*J. V. Poncelet* Napóleon katonájaként 24 éves korában Moszkvából visszavonulóban Kutuzov seregének fogságába esett. 1812–13 rettenetes hideg telén 800 km-t meneteltették őt és társait az orosz sztyeppén át a Volga partjáig, a szaratovi fogolytáborig. A rabságban Poncelet felelevenítette magában a bevonulás előtt nem sokkal befejezett egyetemi tanulmányait, olvasmányait. Mindezek új életre keltek benne. Könyvtártól elzártan, szellemi társakat nélkülözve, fizikai fájdalmaktól gyötörten a fiatal hadmérnök a geometria addig ismeretlen területeit fedezte fel. Megalkotta többek között az ideális pont fogalmát, megálmodott egy különleges leképezést, a polaritást[2], és elméjében furcsa körtáncra indultak a poligonok, itt született meg cikkünk témája, Poncelet tétele is.

Az életben maradt rabokat, köztük Poncelet-t, 1814 szeptemberében engedték szabadon. A mérnök-matematikus fogságban fogant gondolatai 1822-ben jelentek meg nyomtatásban az „Értekezés az alakzatok projektív tulajdonságairól" című könyvében. Ebben található az alábbi tétel:

**Poncelet tétele:** *Legyenek adva az egymást nem érintő $e$ és $a$ körök, $a$ az $e$ belsejében. Az $e$ körön tetszőlegesen választott $A_0$ pontból indulva megszerkeszthetjük az $e$ kör $A_1, A_2, \ldots$ pontjait úgy, hogy az $A_0A_1$, $A_1A_2, \ldots$ egyenesek érintsék az $a$ kört és bármely két, a sorban egymást követő egyenes különbözzék egymástól.*

*Előfordulhat, hogy bizonyos számú lépésben visszajutunk a kezdőpontba, azaz $A_n = A_0$. Ebben az esetben az $e$ kör bármely másik pontjából indulunk is ki, biztosan visszaérünk a kezdőpontba, mégpedig pontosan ugyanannyi lépésben ($n$), mint előzőleg.(1. ábra).*

A tétel tehát nem azt mondja ki, hogy mindig van visszatérés, hanem azt, hogy a visszatérés kérdése, és a lépésszám nem a kezdőpont megválasztásától, hanem kizárólag a két kör nagyságától, egymához viszonyított elhelyezkedésétől függ.

A tétel állítása triviálisan teljesül koncentrikus körök esetén. Minden más esetben viszont meglehetősen nehéz a bizonyítás. Ez az első ránézésre talán ártatlannak tűnő tétel nemcsak születésének regényes körülményei miatt érdekes, de a XIX. századi matematika sűrűjébe vezető tartalma miatt is. Poncelet állítása, a két fejezettel később közölt általánosabb alakjában, ekvivalens a harmadrendű görbe csoporttulajdonságával és a trigonometrikus függvények általánosításainak, az elliptikus függvényeknek az addíciós tételeivel.

Poncelet körök helyett tetszőleges irreducibilis másodrendű görbékre mondta ki a tételt (lásd a 6. feladatot). Azt sem kellene megkövetelni, hogy az egyik görbe a másik belsejében legyen, de ez a fajta általánosítás nagyon megnehezítené az elemi tárgyalást.

## Körsorok

Az $O_a(u_a, v_a)$ középpontú $r_a$ sugarú $a$ kör (affin) egyenlete:

$$(x-u_a)^2 + (y-v_a)^2 - r_a^2 = 0. \tag{1}$$

Jelöljük az (1) egyenlet bal oldalán álló polinomot, mint $x$ és $y$ függvényét $a(x, y)$-nal. Ha a $P(\xi, \eta)$ pont illeszkedik erre a körre, akkor

$$a(\xi, \eta) = 0,$$

ha viszont nem, akkor

$$a(\xi, \eta) \neq 0.$$

Az utóbbi esetben $a(\xi, \eta)$ értéke nem csak azt árulja el, hogy a $P$ pont nincs rajta a körön, hanem arról is ad információt, hogy hogyan nincs rajta.

A $a(\xi, \eta)$ kifejezés fő része, $(\xi - u_a)^2 + (\eta - v_a)^2$ az $O_aP$ szakasz hosszának négyzetét adja meg. Ha $a(\xi, \eta)$ értéke negatív, az azt jelenti, hogy $O_aP^2 < r_a^2$, azaz $P$ az $a$ kör belsejében helyezkedik el. Ha a vizsgált érték pozitív, akkor $P$ a körön kívül van, ráadásul $a(\xi, \eta)$ épp a $P$-ből a körhöz húzott érintő hosszának négyzete (*2. ábra*).

[1] Murányi Beatrix fordítása
[2] *Kiss György:* A körre vonatkozó polaritás, KöMaL, 1998/8. szám, 450. o.

Ennél még némileg többet is mondhatunk. Mind a pozitív, mind a negatív esetben igaz, hogy a $P$-n át a körhöz húzott tetszőleges szelőnek a körrel vett $R$, $Q$ metszéspontjaira a $PR \cdot PQ$ érték állandó, azaz független a szelő választásától. Ez a kerületi és az érintőszárú kerületi szögek tételének felhasználásával és hasonló háromszögek segítségével igazolható.

Ezt az állandó értéket a $P$ pont $k$ *körre vonatkozó hatványának* is mondják és éppen egyenlő $O_aP^2 - r_a^2$ -tel, tehát $a(\xi, \eta)$ értékével. [3]

Ennek alapján azt mondhatjuk, hogy az

$$a(x, y) = t$$

egyenletet azok a pontok elégítik ki, amelyeknek az $a$ körre vonatkozó hatványa $t$; $t > 0$ esetén tehát azok a pontok, amelyekből a $a$-hoz húzott érintő szakasz hosszának négyzete $t$.

Legyen adva az $a$ körtől különböző $b$ kör is, melynek egyenlete

$$b(x, y) = (x - u_b)^2 + (y - v_b)^2 - r_b^2 = 0.$$

Kereshetjük azokat a pontokat, melyekből az $a$-hoz, illetve a $b$-hez húzott érintő szakasz hosszának aránya egy adott érték. Általánosabban, legyen $c$ azon pontok mértani helye a síkban, melyeknek az $a$-körre vonatkozó hatványa úgy aránylik a $b$ körre vonatkozó hatványához, mint $\alpha$ a $\beta$-hoz. A $c$ halmaz egyenlete:

$$\beta a(x, y) - \alpha b(x, y) = 0. \tag{2}$$

Ez is egy kör (esetleg pont, vagy üres halmaz, illetve $\alpha = \beta$ esetén egyenes) egyenlete, hiszen olyan kétváltozós másodfokú egyenlet, amelyben $x^2$ és $y^2$ együtthatója egyenlő ($\alpha = \beta$ esetén 0) $xy$-os tag pedig nincsen benne.

A (2) alakú görbék halmazát az $a$ és $b$ *generálta körsornak* nevezzük. A körsor bármelyik két eleméből megkapható az összes többi elem, egyenleteik (2) alakú *lineáris kombinációik* segítségével. Tehát a körsort bármelyik két tagja generálja, azaz meghatározza.

Ha $a$ és $b$ egy körsor tetszőleges két köre, $c$ pedig a körsor bármelyik eleme, akkor $c$ különböző pontjainak az $a$-ra és $b$-re vonatkozó hatványainak aránya ugyanaz az érték.

Nem nehéz igazolni, hogy 3 fajta körsor van: *nem metsző*, *érintő* és *metsző*. Az elsőben semelyik két körnek sincs közös pontja, a másodikban a körök egy bizonyos pontban érintkeznek egymással, a harmadikban két közös ponton mennek át. (*3. ábra*.Lásd még az 1., 2. feladatokat.)

### Poncelet gondolatmenete

Ebben a fejezetben keveset bizonyítunk, inkább csak vázoljuk Poncelet gondolatmenetét. Annál is inkább, mert az utolsó részben közölt bizonyítás az itteni részletekre is rávilágít.

*L. Euler* egy nevezetes tétele kapcsolatot teremt a háromszög beírt és körülírt körének $r$, $R$ sugarai és középpontjaik $d$ távolsága között:

$$R^2 - d^2 = 2Rr. \tag{3}$$

A tétel bizonyítása megtalálható *H.S.M. Coxeter* és *S. L. Greitzer:* Az újra felfedezett geometria című könyvében (Gondolat Kiadó, 1977.) (2.1.2 Tétel), de a 3. feladat is segítséget ad a bizonyításhoz.

Tegyük fel most, hogy azt a feladatot kapjuk, hogy szerkesszünk háromszöget, ha adott körülírt és beírt körének sugara és a két középpont távolsága. A tétel alapján mondhatjuk, hogy ha a három adat nem teljesíti a (3) összefüggést, akkor nem létezik ilyen háromszög, ha viszont teljesíti, akkor a háromszög alulhatározott, végtelen sok megoldás van.

A helyzet ahhoz hasonló, mint mikor három szögből akarunk háromszöget szerkeszteni. Csak akkor van megoldás, ha a szögek összege 180°, ekkor viszont végtelen sok megoldás van. Sőt, a háromszög egyik oldalát ilyenkor tetszőlegesen felvehetjük, mindig találunk megoldást. Éppen így, ha az $e$ és $a$ körök $R$, $r$ sugarai és középpontjuk $d$ távolsága kielégíti a (3) egyenletet, akkor az $e$ kör bármely pontja felvehető egy $e$-be és $a$ köré írt háromszög csúcsaként. Ez az állítás persze indoklásra szorul, ehhez hozzásegít pl. a 3. feladat. Az előző állításból és Euler tételéből már következik Poncelet tétele az $n = 3$ esetre: csak a (3) feltétel teljesülése esetén záródhat a poligon három lépésben, akkor viszont akárhonnan indulva záródik.(*4. ábra*).

*Hogyan nem léteznek a (3) egyenletnek nem megfelelő adatokból szerkesztendő háromszögek?* Poncelet bizonyításának lépései és könyvének bevezetőjében a szerkesztő eszközök beszerzésének nehézségeiről valló panaszai alapján úgy látom, hogy a rab mérnök erre a kérdésre kereste a választ.

Az *5. ábrán* ilyen rossz adatokból próbáltunk háromszöget szerkeszteni. Az $e$, $a$ köröket a rossz adatoknak megfelelően vettük fel. Az $e$ kör egy próbaképp felvett $A$ pontjából érintőt húztunk $a$-hoz, ami $e$-ből kimetszette a háromszög következő csúcsát, $B$-t. A $B$-ből $a$-hoz húzott másik érintő segítségével kaptuk $C$-t. Az $AC$ egyenes láthatóan nem érinti $a$-t, tehát a szerkesztés nem volt sikeres. Több hasonló próbálkozás után Poncelet azt vehette észre (hiszen ezt

[3]a $PR \cdot PQ$ szorzatot előjelesen értelmezzük, tehát ha $P$-től $R$ és $Q$ ellenkező irányban vannak, azaz ha $P$ a kör belső pontja, akkor a szorzat értéke negatív.

bizonyította), hogy a kísérletezés során kapott $AC$ egyenesek egyike sem érinti ugyan az $a$ kört, de mindegyik érint egy bizonyos másik kört, $c$-t. Ráadásul ez a $c$ kör az $e$ és $a$ generálta körsorhoz tartozik. Ez különösen feltűnő a háromszög szerkesztésének szempontjából eleve reménytelen $a$, $e$ metsző körök esetén.)

Tehát a szerkesztendő háromszögek egyfajta nagyon szabályos módon nem léteznek. Euler tételéről kiderült, hogy nem egyszerűen csak a háromszögről és annak két köréről, hanem egy körsor elemei között kígyózó poligon záródásáról szól.

A megfigyelésekből adódik az előző szerkesztési feladat alábbi általánosítása.

*Az adott $e$ kör és a belsejében felvett $a$, $b$, $c$ körök tartozzanak ugyanahhoz a körsorhoz. Szerkesztendő háromszög, melynek körülírt köre $e$, $AB$, $BC$, $AC$ oldalai pedig rendre érintik az $a$, $b$, $c$ köröket.*

Egy külső pontból egy körhöz két érintő is húzható. Hogy az ebből fakadó szerkesztési bizonytalanságot megszüntessük, a feladatban rögzítsünk az $a$, $b$, $c$ körökön egymástól függetlenül egy-egy forgásirányt, és követeljük meg, hogy a szerkesztendő $ABC$ háromszög oldalain az $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC}$ irányok mindhárom érintési pontnál egyezzenek meg a megfelelő érintő kör forgásirányával.

A szerkesztési feladat megoldása korábbi feladatunkéhoz hasonló, de a bizonyítás itt még nehezebb. (*6. ábra*).Most sem a szerkesztés okozza a nehézséget, hanem a diszkusszió: Ha az $e$, $a$, $b$, $c$ körök (és az utóbbiak forgásiránya) megfelelő, akkor $e$ bármely pontjából kiindulva az egyértelmű szerkesztési eljárás eredményeképp mindig háromszöget kapunk. Általában pedig itt is azt vehetjük észre, hogy a próbálkozások során kapott $AC$ egyenesek mindig a körsor egy bizonyos $c'$ körét érintik, mindig ugyanabban a forgásirányban, de ez a $c'$ kör az esetek zömében nem egyezik meg $c$-vel. Most nem térünk ki rá, hogy mikor egyezik meg a $c'$ kör $c$-vel, éppen elég meglepő, hogy a $c'$ kör egyáltalán létezik.

Tekintsük most az $e$ kör pontjainak halmazán azt a leképezést, amely az $X \in e$ ponthoz hozzárendeli az $X$-ből az $a$ (irányított) körhöz húzott, az irányításnak megfelelő érintő $e$-vel való második metszéspontját. Úgy tekintjük, hogy ha az $a$ kör megegyezik $e$-vel, akkor ez a leképezés az *identitás*, azaz a helybenhagyás. Ha az $a$ kör koncentrikus $e$-vel, de nem egyezik meg vele, akkor a vizsgált transzformáció egy egyszerű elforgatás. Más esetben csak a forgatáshoz hasonló hozzárendelést kapunk, nevezzük ezt a továbbiakban *ferde elforgatás*nak. Két, azonos pont körüli elforgatás egymás utáni elvégzésének eredőjeként (azaz a két elforgatás *kompozíciója*ként) újabb elforgatást kapunk, melynek szöge az eredeti forgási szögek összege. Előbb épp azt vettük észre, hogy ennek az állításnak az első fele általánosítható: az $a$ irányított körre, majd a $b$ irányított körre vonatkozó ferde elforgatások kompozíciója is egy ferde elforgatás, nevezetesen a fent említett $c'$ kör által meghatározott ferde elforgatás. Jacobi bizonyítása majd arra világít rá, hogy mi az a szám, az a mérték, ami az általános esetben a forgási szöget helyettesíti.

Mintha az $e$ körből, a körsor $e$ belsejében fekvő irányított köreiből és pontköréből (lásd a 2. feladatot), álló $\mathbf{P}$ halmazon lenne egy $\circledast$ művelet, ami a ferde elforgatások kompozíciójának felel meg:

$$a \circledast b = c'.$$

Poncelet, bár szót sem ejtett ilyen absztrakt algebrai fogalmakról, lényegében mégis azt mutatta meg, hogy ez a $\circledast$ művelet asszociatív és kommutatív. (*7. ábra*):$a \circledast b = b \circledast a$ Ez azt jelenti, hogy a $\mathbf{P}$ halmaz a $\circledast$ műveletre nézve kommutatív, másként szólva *Abel* csoportot alkot, hiszen a maradék csoportaxiómák is teljesülnek: $e$ az egységelem, és egy irányított kör inverze ugyanaz a kör az ellentétes irányításával.

Gondolatmenetének eredményeként Poncelet a korábban kimondottnál jóval általánosabb tételhez jutott el:

**Poncelet általános tétele.** *Legyen $e$ egy nem metsző körsor egyik köre, az $a_1$, $a_2$, …, $a_n$ irányított körök pedig ugyanennek a körsornak $e$ belsejében található nem feltétlenül különböző tagjai. Az $e$ körön fölvett $A_0$ pontból kiindulva megszerkesztjük az $A_1$, $A_2, \ldots$ $A_n$ pontokat ugyanezen a körön úgy, hogy az $A_0A_1$, $A_1A_2, \ldots$ $A_{n-1}A_n$ egyenesek rendre érintsék az $a_1$, $a_2, \ldots$ $a_n$ köröket, az irányításnak megfelelően. Előfordulhat, hogy a szerkesztés végén éppen visszajutunk, azaz $A_n = A_0$. Ebben az esetben az $e$ kör bármelyik másik pontjából is indulunk ki, az $n$-edik lépés után vissza fogunk jutni a kezdőpontba és még arra sem kell ügyelnünk, hogy ugyanabban a sorrendben húzzuk az érintőket a megadott körökhöz.*

**Bizonyítás.** Az $e$ körvonal $a_1$, $a_2, \ldots$ $a_n$ körökre vonatkozó ferde elforgatásainak kompozíciója a körsor

$$b = a_1 \circledast a_2 \circledast \ldots \circledast a_n$$

irányított köre által meghatározott ferde elforgatással egyezik meg. Ez a transzformáció az $A_0$ pontot önmagára képezi, tehát a $b$ irányított körhöz $A_0$-ból húzott érintő nem metszheti az $e$ kört, hanem azt is érinti. Ez azt jelenti, hogy $b = e$, hiszen a körsor többi eleme $e$ belsejében van és nem is érintheti $e$-t. Az $e$ által meghatározott ferde forgatás az identitás, tehát az $A_0$ pont helyett bármelyik másik pontból indulunk is ki, visszajutunk hozzá. A csoport kommutativitása miatt az se számít, hogy milyen sorrendben húzzuk az érintőket a megadott körökhöz.

Ha $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = a$, akkor Poncelet korábban említett tételéhez jutunk. Ott nincs szükség a körök irányításának bevezetésére, mert ha az $a$ kör (illetve az általános esetben az $a_1$, $a_2 \ldots$ $a_n$ körök mindegyikének) irányítását megfordítjuk, akkor ugyanazokat az érintőket kell megrajzolni, mint korábban, csak ellenkező irányban és fordított sorrendben.

### Poncelet tétele és a harmadrendű görbe

Feleltessünk meg a $\mathbf{P}$ csoport elemeinek egy-egy pontot az alábbi módon. Válasszunk $e$-n egy tetszőleges $E$ pontot $e$ számára. A körsor egy tetszőleges irányított körének feleljen meg az $E$-ből hozzá (az irányításnak megfelelően) húzott érintő érintési pontja (*8.a) ábra*).

Az így kapott pontok egy harmadrendű görbe részhalmazát alkotják (lásd a 6. feladatot). Ha a görbe egységelemének az $E$ pontot tekintjük, akkor a szóbanforgó részhalmaz egyben részcsoport is lesz és a $\mathbf{P}$-beli $\circledast$ művelet és a harmadrendű görbe $*$ művelete éppen megfelel egymásnak (*8.b) ábra*). Ezt az állítást itt nem bizonyítjuk.

Érdekesen lóg ki a sorból a koncentrikus körökből álló körsor esete. Ebben az esetben $\mathbf{P}$ elemei valódi forgatásoknak felelnek meg.

*8.b) ábra.* Ha $a \circledast b = c'$, akkor az $E$-ből az $a$, $b$, $c'$ körökhöz húzott érintők $\tilde{A}$, $\tilde{B}$, $\tilde{C}'$ érintési pontjaira $\tilde{A} * \tilde{B} = \tilde{C}'$.

Az $E$-ből a körökhöz húzott érintők talppontjai első látásra nem harmadrendű görbét, hanem az $EO$ szakasz $k$ Thalesz-körét alkotják. Ha az $a$ irányított körhöz hozzárendelt pont $\tilde{A}$, akkor a körnek megfelelő forgatás a $2 \cdot \tilde{A}OE\sphericalangle = \tilde{A}FE\sphericalangle$-gel való forgatás, ahol $F$ a $k$ középpontját, $\sphericalangle$ az irányított szöget jelöli.

Tegyük fel, hogy ehhez a Thalesz körhöz tartozik még egy $l$ egyenes is, nevezetesen az ideális egyenes. (A sugárnyaláb modellben úgy is fogalmazhatnánk, hogy mostani ábránk a teljes konfigurációnak csak egy rajza, amiről lemaradt az $l$ egyenes, mert a rajzsík párhuzamosan áll az egyenesről szemünkbe jövő fénysugarak síkjával.) Az $l \cup k$ ponthalmaz egy (reducibilis) harmadrendű görbe, hiszen polinomja egy másodfokú és egy elsőfokú polinom szorzata. A reducibilis görbén nem végezhető el korlátlanul a $*$ művelet (pl. az egyenes két pontját most nem tudnánk összeszorozni), de az adott esetben $k$ bármely két pontja össze-$*$-szorozható. Az $\tilde{A}$, $\tilde{B} \in k$ pontok $\tilde{A} * \tilde{B}$ szorzatát úgy kapjuk, hogy tekintjük az $\tilde{A}\tilde{B}$ egyenes és $l \cup k$ harmadik metszéspontját, tehát az $\tilde{A}\tilde{B}$ egyenes ideális pontját; majd ezt összekötjük $E$-vel, azaz párhuzamost húzunk $\tilde{A}\tilde{B}$-vel $E$-n át és ez az egyenes kimetszi $k$-n $\tilde{A} * \tilde{B}$-t. A $*$ és $\circledast$ műveletek egymásnak való megfelelése tehát az alábbi elemi állításon múlik:

*Ha az $\tilde{A}\tilde{B}E$ háromszög körülírt körének középpontja $F$ és az $E\tilde{C}$ húr párhuzamos az $\tilde{A}\tilde{B}$ húrral, akkor*

$$EF\tilde{A}\sphericalangle + EF\tilde{B}\sphericalangle = EF\tilde{C}\sphericalangle \pmod{2\pi}.$$

E szép állítás igazolását az olvasóra bízzuk.

Míg Poncelet 1822-ben publikálta poligonjait, a harmadrendű görbe csoporttulajdonságára csak 1835-ben derített fényt a königsbergi Jacobi. De előtte még neki is volt egy kalandja Poncelet tételével.

### Elliptikus integrálok

1827-ben a *Journal für die reine und angewandte Mathematik* [4] folyóiratban az alábbi feladatot tűzte ki J. Steiner:

*Egy ötszög egyszerre húr- és érintő-ötszög is. Milyen összefüggés áll fönn a két kör sugara és középpontjaik távolsága között? Oldjuk meg a feladatot* 6-, 7-, 8-, 9, 10-*szög esetére is.*

Steiner tehát, Poncelet tételéhez kapcsolódva, a záródás algebrai feltételei iránt érdeklődött. Steiner tudta a megoldást ezekben az esetekben, de nemhiába tűzte ki a problémát, mert felkeltette Jacobi érdeklődését, aki így új, különleges bizonyítást adott Poncelet tételére.

Jacobi ekkortájt az elliptikus integrálokkal foglalkozott. Ez a problémakör G. Fagnano hercegnek az *ellipszissel* és a *lemniszkáta* görbével kapcsolatos eredményeiből született. Fagnano szerette volna meghatározni, hogy az $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$ egyenletű lemniszkáta origóból induló $t$ hosszúságú húrjához mekkora lemniszkátaív tartozik. (*9. ábra*).Ezzel a problémával ekvivalens kérdéssel J. Bernoulli és L. Euler is találkozott rugalmasságtani vizsgálódásaik során. Egyiküknek se sikerült fölírni a lemniszkáta ívhosszát megadó $I(t)$ függvényt.

Fagnano eredménye az volt, hogy meg tudta határozni, hogy milyen hosszú az a húr, amelyhez kétszer akkora ív tartozik, mint a $t$ hosszúságú húrhoz. Euler messzemenően általánosította a módszert. Képletet, úgynevezett *addíciós formulát*, adott, amely a $t_1$, $t_2$ számokból előállítja annak a húrnak a hosszát, amelyhez tartozó ív éppen olyan hosszú, mint a $t_1$ és $t_2$ hosszúságú húrok ívei összesen. Euler ezen is túl ment: megadta azoknak az ív- és területszámítási problémáknak (általánosabban: *integráloknak*) egy széles körét, ahol addíciós formula adható. Ezeket nevezzük elliptikus integráloknak.

Jacobi is jelentős eredményeket ért el ebben a témában. N. H. Abellel versengve írták a cikkeket az említett folyóiratban az elliptikus integrálokról. Jacobi, változatosságképpen, megpróbálkozott Steiner feladatával is. Ábrát készített, behúzott néhány vonalat, kifejezte a hosszukat és elámult: az elliptikus integrálok addíciós formuláihoz kísértetiesen hasonló képletek álltak előtte. A képletek azt mutatták, hogy van egy mennyiség, egy integrál, ami a Poncelet-poligon egyes oldalainak behúzásakor mindig ugyanannyival változik. A koncentrikus körök esetén ez a mennyiség a poligonhoz tartozó középponti szög. Ebben a speciális esetben ugyanis a két kör közötti minden „érintő húr" egyenlő hosszú, középponti szögeik is egyenlőek. Ha e középponti szög $n$-szerese $360^\circ$, vagy annak egész számú többszöröse, akkor a poligon $n$ lépésben záródik, egyébként pedig nem.

[4] A *Tiszta és alkalmazott matematika lap* című folyóiratot éppen Steiner és Abel ösztönzésére alapította A. L. Crelle porosz mérnök.

Jacobi azt látta a képletekből, hogy az általános esetben is van egy, a középponti szögnek megfelelő mérték. A tétel bizonyításához nem volt lényeges, hogy mi ennek a mértéknek a geometriai tartalma. Ezt azért hangsúlyozzuk ennyire, mert az alább közölt bizonyítás logikus és szemléletes, de nem árt tudni, hogy aki kitalálta, az másfajta logikával, másfajta szemlélettel jött rá.

**Jacobi bizonyítása**

Szeretnénk a Poncelet tétel $e$ alapkörén egy olyan mértéket bevezetni, amely a kör $PP'$ és $QQ'$ ívéhez ugyanazt a számot rendeli, ha a $PP'$ egyenes és a $QQ'$ egyenes is érinti az $a$ kört.

Próbálkozzunk először egymáshoz közeli ívekkel. Az is jó lenne, ha a $PQ$, $P'Q'$ ívek mértéke lenne egyenlő. Az említett ívek majdnem ugyanolyan hosszúak, mint a $PQ$, $P'Q'$ szakaszok. Ezek a szakaszok, sajnos, nem egyenlő hosszúak, de egymással egyszerűen kapcsolatba hozhatók. A $PQT$, $Q'P'T$ háromszögek ugyanis az egyenlő kerületi szögek miatt hasonlóak. Ennek alapján

$$\frac{PQ}{PT} = \frac{P'Q'}{Q'T}. \tag{4}$$

Az egyenlet két oldalán a nevezők a $PQ$, illetve a $P'Q'$ ív pontjaiból az $a$ körhöz húzott érintőszakaszok hosszát közelítik. Ez azt jelenti, hogy ha egyenlő mértéket akarunk adni a $PQ$, $P'Q'$ szemköztes íveknek, akkor mindkettőt a pontjaiból az $a$ körhöz húzott érintő reciprokával kell súlyozni.

Ezt a gondolatot szemléletessé tehetjük. Emeljünk az $e$ körre, a kör síkjára merőlegesen, hengerszerűen egy palástot. A palást alapja legyen maga a körvonal, a magassága viszont pontonként változzék. A kör $P$ pontjában a palást magassága legyen egyenlő a $P$-ből az $a$ körhöz húzott érintőszakasz hosszának reciprokával. A palást felszíne a keresett mérték.(*10. ábra*).

Állítjuk, hogy a $PQ$ és a $P'Q'$ ívekhez tartozó palástdarabok felszíne egyenlő. A (4) egyenlet két oldalán e paláströszek felszínének egy-egy közelítő értéke áll. A $PQ$ és $P'Q'$ szakaszok hossza a $PQ$, $PQ'$ ívek hosszát, $\frac{1}{PT}$ és $\frac{1}{Q'T}$ értéke pedig a vizsgált ívek fölötti palást magasságát közelíti. E palástdarabok felszínére pontosabb értéket kapunk, ha a $PQ$ ívet és vele szemben a $P'Q'$ ívet kisebb darabokra osztjuk, és a kisebb részeket külön-külön becsüljük meg egy-egy húr és közelítő magasság szorzatával. Ha ezt mindig a (4) egyenlet két oldalának megfelelő formula segítségével tesszük, akkor a $PQ$ ív és a $P'Q'$ ív fölötti részekre mindig egyenlő közelítő értékeket kapunk. Ezzel a módszerrel a két paláströsz felszínét tetszőleges pontossággal megközelíthetjük, ami csak úgy lehet, hogy ez a két rész egyenlő felszínű.

Eredményünkből következik, hogy a $PP'$ és $QQ'$ ívekhez tartozó palástdarabok is egyenlő felszínűek. Képzeljük el, hogy a $P$, $P'$ pontokat úgy mozgatjuk az $e$ körön, hogy a $PP'$ húr mindig érinti az $a$ kört. Megállapításaink szerint eközben a $PP'$ ívhez tartozó paláströsz területe mindig állandó marad. Jelölje ennek az állandónak az értékét $J$, a teljes palást területét $I$.

A Poncelet-poligon pontosan akkor záródik $n$ lépésben $m$ körbefordulás után, ha $mI = nJ$. Ez a feltétel teljesen független az $A_0$ kezdőpont megválasztásától,

így Poncelet tételét bebizonyítottuk. Azt is láthatjuk, hogy a poligon akkor fog záródni, ha a $\frac{J}{I}$ hányados racionális és a visszatéréshez szükséges lépésszám ennek a racionális számnak a nevezője.

A Jacobi-féle palást területe olyan tulajdonságú, mint a lemniszkáta ívhossza. Egy rögzített pontból induló húrok hosszától való függése transzcendens, azaz véges sok elemi függvény segítségével nem fejezhető ki. De föl lehet írni a Fagnano-féle duplikációs képletnek megfelelő $n$-szerezési formulát, amivel Steiner problémája is teljes általánosságban megoldható. Ezt a munkát azonban, csak mintegy 25 évvel később, A. Cayley végezte el.

Jacobi módszere, egy kis módosítással, alkalmas Poncelet általános tételének bizonyítására is. Ennek érdekében rögzítsünk az $e$ körön egy $E$ pontot és a palást $P$ pont fölötti magasságát definiáljuk úgy, mint az $E$ ponttól, illetve a $P$ ponttól az $a$ körhöz húzott érintők arányát: $m(P) = \frac{EE_A}{PP_A}$. Ez a korábban definiált magasságtól csak az $EE_A$ konstans szorzóban különbözik. Értelme az, hogy ez a magasság univerzális, a körsor minden eleme ugyanazt a palástot határozza meg. Ennek magyarázata egy korábbi eredményünkben rejlik. Láttuk, hogy ha $a$, $b$, $e$ egy körsor három eleme, akkor $e$ különböző pontjainak az $a$, $b$ körökre vonatkozó hatványainak, esetünkben az érintő szakaszoknak, az aránya egyenlő: $\frac{EE_A}{EE_B} = \frac{PP_A}{PP_B}$, azaz $\frac{EE_A}{PP_A} = \frac{EE_B}{PP_B}$.

Ha a teljes palást területe $I$, a körsor $a_1, a_2, \ldots, a_n$ irányított elemeihez az érintők által meghatározott ívek fölötti palástdarabok területe $J_1, J_2, \ldots, J_n$ akkor a záródás feltételét a

$$J_1 + J_2 + \ldots + J_n = mI$$

egyenlet fogalmazza meg. Ennek az összefüggésnek a teljesülése pedig valóban független a kezdőpont választásától.

**Feladatok**

**1. a)** Mutassuk meg, hogy bármely körsor tagjainak középpontjai egy egyenesen helyezkednek el.

**b)** Legyen egy körsor egyik körének sugara $R$, a körsor egy másik, az előzőnél kisebb körének sugara $r$, a két középpont távolsága $d$. Bizonyítsuk be, hogy a

$$k = \sqrt{\frac{4Rd}{(R+d)^2 - r^2}}$$

értéke nem függ a kisebb kör választásától.

**c)** Mutassuk meg, hogy a körsor rendre akkor koncentrikus; nem metsző; érintő; metsző, ha $k = 0$; $0 < k < 1$; $k = 1$; $1 < k$.

**2.** Bizonyítsuk be, hogy a nem metsző; érintő; metsző körsorokban rendre 2; 1; 0 *pontkör*, azaz $(x-u)^2+(y-v)^2 = 0$ egyenletű alakzat található.

**3.** Az $ABC$ háromszög körülírt köre $e$, beírt köre $a$. A két kör sugara $R$, illetve $r$, középpontjaik távolsága $d$. A beírt kör érintési pontjai $X$, $Y$, $Z$.

**a)** Bizonyítsuk be, hogy az $a$ körre vonatkozó inverziónál az $e$ kör képének sugarát és középpontjának $a$ középpontjától való távolságát az

$$R' = \frac{Rr^2}{R^2 - d^2} \quad d' = \frac{dr^2}{R^2 - d^2}$$

képletek adják meg!

**b)** Bizonyítsuk be, hogy az $a$ körre vonatkozó inverziónál az $A$, $B$, $C$ pontok az $XYZ$ háromszög oldalfelezőpontjaiba képződnek.

**c)** Bizonyítsuk be Euler tételét!

**d)** Bizonyítsuk be Poncelet tételét az $n = 3$ esetben!

**4.** Keressük meg az Euler tételének megfelelő formulát a háromszög körülírt és *hozzáírt* körére vonatkozólag!

**5. a)** Bizonyítsuk be, hogy az $a(x,y) = 0$, $b(x,y) = 0$ körök generálta körsor $P(\xi,\eta)$ ponton átmenő elemének egyenlete:

$$b(\xi,\eta)a(x,y) - a(\xi,\eta)b(x,y) = 0.$$

**b)** Bizonyítsuk be, hogy az (1) egyenletű kört a $P(\xi,\eta)$ pontjában érintő egyenes egyenlete:

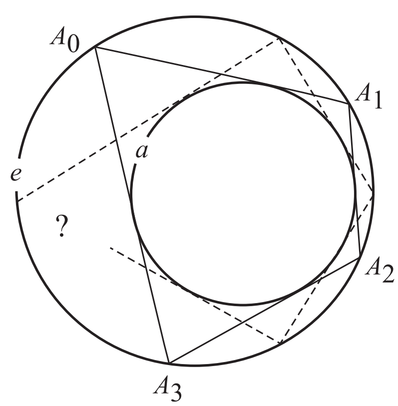
$$(\xi - u_a)(x-\xi) + (\eta - v_a)(y-\eta) = 0.$$

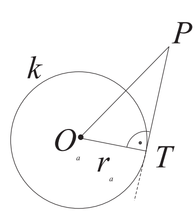
**c)** Bizonyítsuk be, hogy egy pontból egy körsor elemeihez húzott érintők érintési pontjai általában harmadrendű görbét alkotnak.

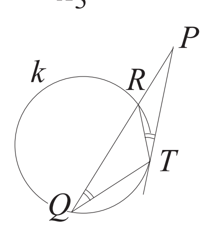
**6. a)** Írjuk föl az (1) egyenlet homogén megfelelőjét és mutassuk meg, hogy a körre illeszkednek az $(1,\ i,\ 0)$, $(1,\ -i,\ 0)$ ideális és egyben képzetes $(i^2 = -1)$ pontok.

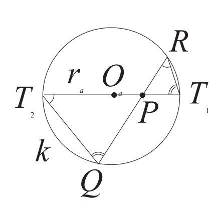
**b)** Bizonyítsuk be, hogy egy valós együtthatós, nem üres irreducibilis másodrendű görbe pontosan akkor kör, ha illeszkednek rá az $(1,\ i,\ 0)$, $(1,\ -i,\ 0)$ pontok.[5]

**Hraskó András**

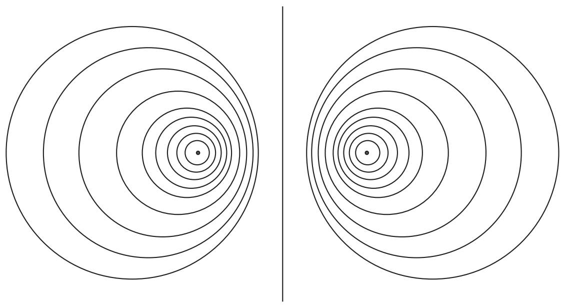


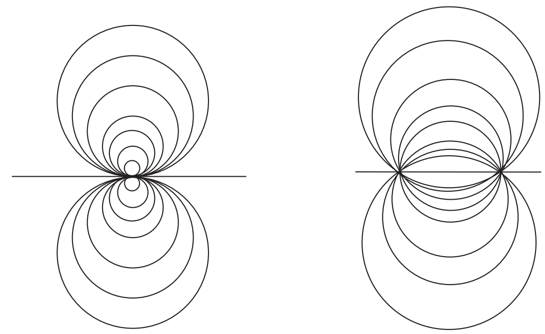



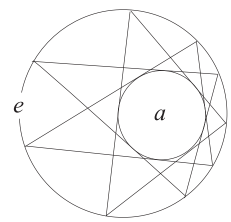



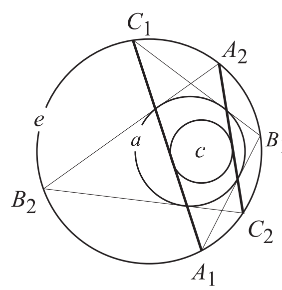

[5]A komplex számok bevezetése a geometriába szintén Poncelet hadifogságbeli töprengéseinek eredménye. Többek között ezt mondta: ha komplex koordinátákat is megengedünk, akkor bármely két másodrendű görbének létezik két közös pontja. Ha ezeket átvetítjük az $(1,\ i,\ 0)$, $(1,\ -i,\ 0)$ pontokba, akkor a két görbéből két kört kapunk. Így a Poncelet tételt is elég két körre igazolni.



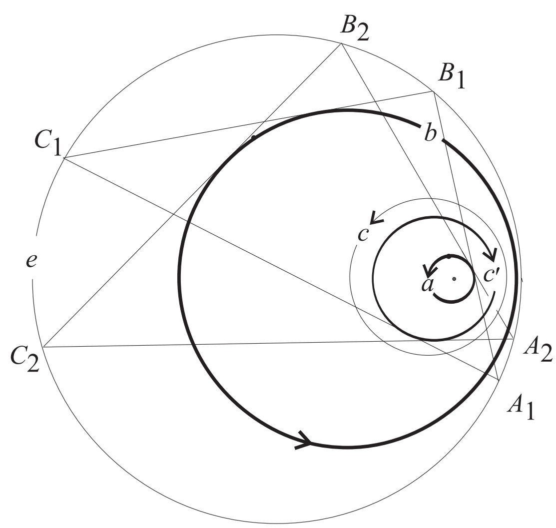




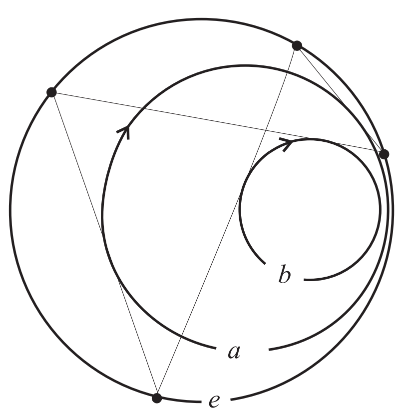
$e$
$a$

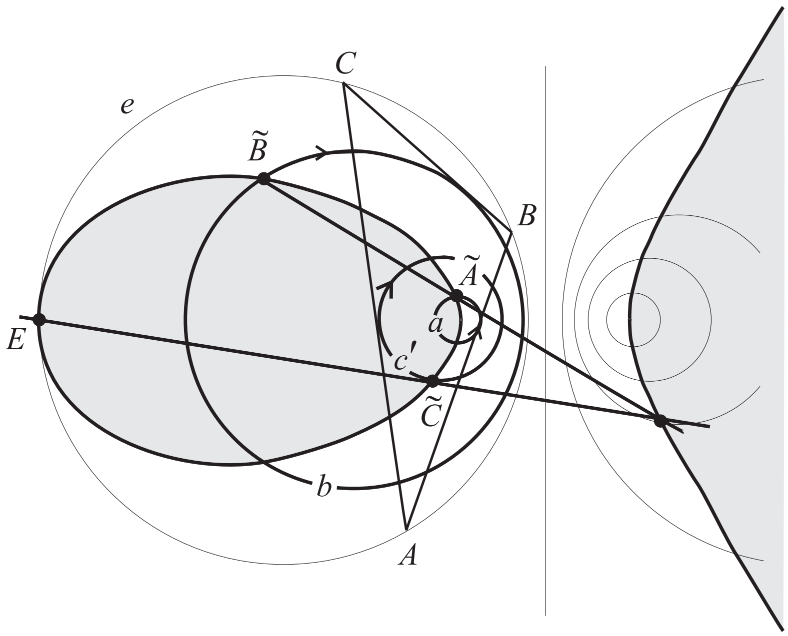
$C_1$
$A_2$
$e$
$a$
$c$
$B_1$
$B_2$
$C_2$
$A_1$

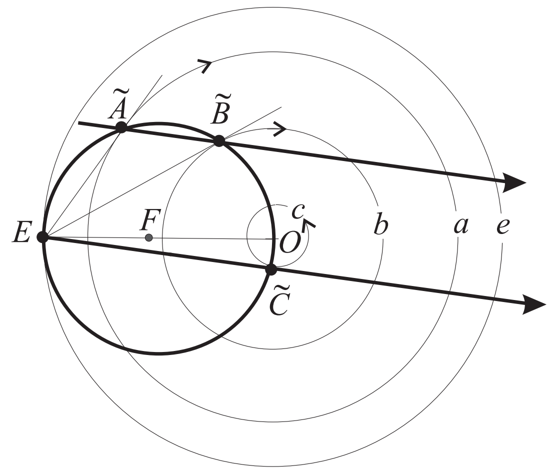



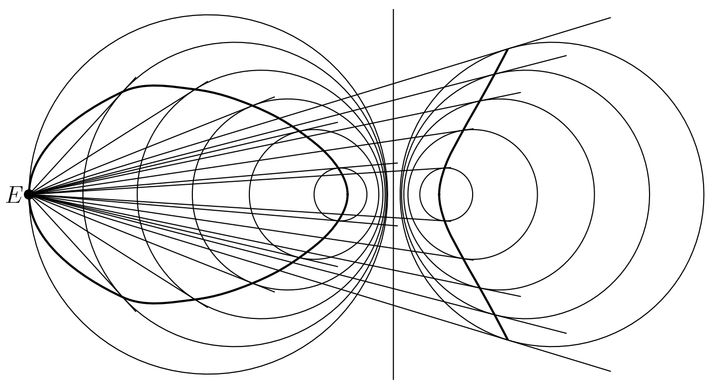
$B_2$
$B_1$
$C_1$
$b$
$c$
$e$
$a$
$c'$
$C_2$
$A_2$
$A_1$

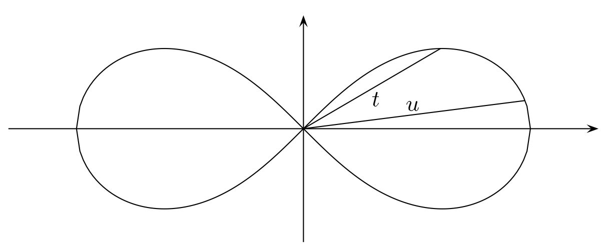



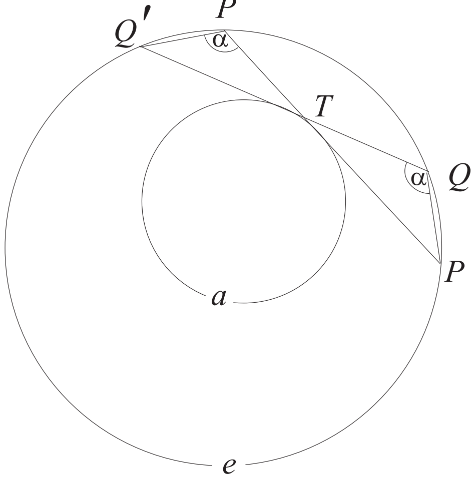
$b$
$a$
$e$

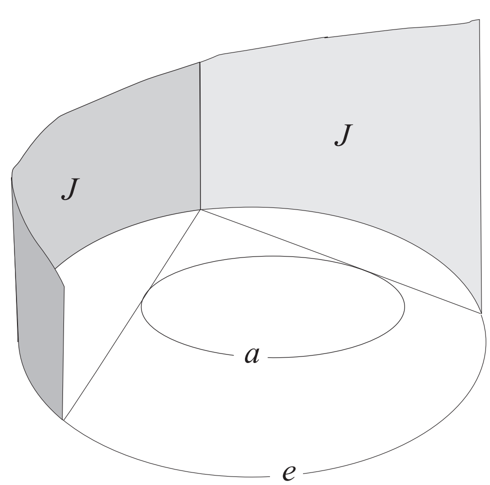

C
e
$\tilde{B}$
B
$\tilde{A}$
E
a
c′
$\tilde{C}$
b
A


$\tilde{A}$
$\tilde{B}$
E
F
c
O
b
a
e
$\tilde{C}$


E


t
u


Q′
P′
α
T
α
Q
P
a
e


J
J
a
e