1. Legyen $\sqrt{x^2-3x+3}=z$ és $\sqrt{x^2-3x+6}=y$ ($z\geq 0$, $y>0$); ekkor $y+z=3$ és $y^2-z^2=3$, tehát $y-z=1$, $y=2$, $z=1$. $x^2-3x+3=1$. Az adott egyenlet megoldásai $x_1=1$, $x_2=2$.

2. A feltétel szerint, millió forintban számolva

$$(1\cdot 1,14^3-1)\cdot 1,2^n>0,6 \qquad n>1,94.$$

Két teljes évet kell várnunk. (Ekkor 604 049 forint lesz a bankban.)

3. A félkör középpontjából a befogókra bocsássunk merőleges szakaszokat. Ezek hossza a félkör sugarával egyezik meg. Így két hasonló derékszögű háromszöget kapunk, amelyekben az átfogó 1,8, illetve 2,4, tehát a hasonlóság aránya $3:4$. A kör sugara legyen $4x$, a kisebb derékszögű háromszög két befogója $3x$, illetve $4x$, átfogója így $5x=1,8$, $x=\dfrac{1,8}{5}$. A félkör sugara $4x=4\cdot\dfrac{1,8}{5}=1,44$ egység.

4. A BD átló egyenesének egy pontja: $x=t$, $y=2t-3$, $t\in\mathbf{R}$. Azokat a P pontokat (B, D) keressük, amelyekre $PA^2=25$, azaz $(t-6)^2+(2t-3-4)^2=25$, $t^2-8t+12=0$, $t_1=6$, $t_2=2$. Így $B(6;9)$ és $D(2;1)$. Mivel $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DC}$ és $\overrightarrow{OD}=(2;1)$, $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}=(0;5)$, ezért $\overrightarrow{OC}=(2;1)+(0;5)=(2;6)$, tehát $C(2;6)$, $AB=9-4=5$, a hozzá tartozó magasság $6-2=4$ egység, a rombusz területe $T=20$ területegység.

5. Nyilván $x\neq 0$, $y\neq 0$, $x+y>0$ és $x-y>0$. A második egyenletből

$$\log_2(x+y)=\log_2 2+\log_2(x-y),\qquad \log_2(x+y)=\log_2 2(x-y),\qquad x+y=2(x-y),\qquad x=3y.$$

Az első egyenletből $\dfrac{x}{y}=3$ vagy $\dfrac{x}{y}=-\dfrac{1}{3}$, azaz $x=3y$, $x>0$, $y>0$, hiszen $y=-3x$ nem lehetséges.

Az egyenletrendszer megoldásai: $x=3t$, $y=t$, $t\in\mathbf{R}^+$.

6. Vegyük fel a gúlának az alapnégyzet két szemközti oldalának a felezőpontján átmenő tengelysíkmetszetét. Ez egy egyenlő szárú derékszögű háromszög az alapra állított beírt négyzettel, hiszen az egyenlő szárú háromszög alapja $2a$, magassága a. Ha a négyzet oldala x, akkor $2a=3x$, $x=\dfrac{2}{3}a$.

A gúla térfogata: $V_g=\dfrac{4a^2\cdot a}{3}=\dfrac{4}{3}a^3$; a kocka térfogata $V_k=\dfrac{8}{27}a^3$.

$$\frac{V_g}{V_k}=\frac{4}{3}a^3:\frac{8}{27}a^3=\frac{9}{2}.$$

A gúla térfogata a kocka térfogatának a 4,5-szerese.

7. Ha $p=0$, akkor $x|x|=0$; ennek egyetlen megoldása $x=0$.

Ha $p>0$, akkor az egyenletnek csak olyan x szám lehet megoldása, amelyikre $x<0$, így $x-2p<0$. Ekkor az egyenlet: $x(2p-x)+p=0$, $x^2-2px-p=0$. Ennek az egyenletnek a diszkriminánsa $D=4p^2+4p>0$, gyökeinek szorzata $x_1x_2=-p<0$, így különböző előjelűek; mivel most $x<0$, azért csak a negatív gyök a megfelelő.

Ha $p<0$, akkor az egyenletnek csak olyan x szám lehet a megoldása, amelyikre $x>0$, így $x-2p>0$. Ekkor az egyenlet: $x(x-2p)+p=0$, $x^2-2px+p=0$. Ennek az egyenletnek a diszkriminánsa $D=4p^2-4p>0$, gyökeinek szorzata $x_3x_4=p<0$, így különböző előjelűek; mivel most $x>0$, azért csak a pozitív gyök a megfelelő.
(A pontosan egy megoldást a $p=0$, $p>0$, $p<0$ esetekben a grafikus megoldás jól szemlélteti.)

8. Mivel $(a+b+c)^2>0$, azért egyrészt azt kell igazolni, hogy $(a+b+c)^2<4(ab+bc+ca)$, azaz

$$a^2+b^2+c^2-2ab-2bc-2ca<0, \tag{1}$$

másrészt, hogy $3(ab+bc+ca)\leq(a+b+c)^2$, azaz

$$a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca. \tag{2}$$

Alkalmazzuk a háromszögegyenlőtlenség(ek)et. Ezek szerint

$$0\leq|a-b|<c,\qquad 0\leq|b-c|<a,\qquad 0\leq|c-a|<b,$$

így négyzetre emelve:

$$0\leq a^2+b^2-2ab<c^2,\qquad 0\leq b^2+c^2-2bc<a^2,\qquad 0\leq c^2+a^2-2ca<b^2.$$

Ez utóbbi három egyenlőtlenséget összeadva kapjuk, hogy

$$0\leq 2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca<a^2+b^2+c^2.$$

Innen rendezés után kapjuk, hogy

$$ab+bc+ca\leq a^2+b^2+c^2<2ab+2bc+2ca,$$

éppen a két bizonyítandó egyenlőtlenség.

Rábai Imre