1. Az első egyenlet $(x-y)(x+y-2)=0$ alakban is írható. Ha $x=y$, akkor $2x^2=10x$, így a megoldások $x_1=0$, $y_1=0$ és $x_2=5$, $y_2=5$.

Ha $x+y=2$, akkor $x^2+(2-x)^2=10$, a megoldások $x_3=3$, $y_3=-1$ és $x_4=-1$, $y_4=3$.

2. Ha az első elem a, a hányados q, akkor

$$a\cdot aq^4=12^2 \quad \text{és} \quad aq-aq^3=18,$$

azaz $(aq^2)^2=12^2$, tehát a harmadik elem $a_3=12$ vagy $a_3=-12$, így

$$\frac{12}{q}-12q=18 \qquad \text{vagy} 2q^2+3q-2=0 \qquad \text{vagy} \qquad \frac{-12}{q}+12q=18; 2q^2-3q-2=0.$$

A megoldások: Ha $q=\frac{1}{2}$, akkor $a=48$, ha $q=-2$, akkor $a=3$, ha $q=2$, akkor $a=-3$ és ha $q=-\frac{1}{2}$, akkor $a=-48$.

3. Az y tengelyt az origóban érintő körök egyenlete $(x-u)^2+y^2=u^2$. Ezen körök közül azok érintik az $y=1-x$ egyenletű egyenest, amelyekre a két vonal egyenlete által alkotott egyenletrendszer megoldása során kapott (x-re vagy y-ra) másodfokú egyenlet diszkriminánsa nulla.

$$(x-u)^2+(1-x)^2=u^2, \qquad 2x^2-2(1+u)x+1=0,$$

$D=4(u+1)^2-8$. $D=0$ pontosan akkor, ha $u=-1+\sqrt{2}$ vagy $u=-1-\sqrt{2}$. A feltételeknek két kör felel meg, ezek egyenlete:

$$x^2+y^2+(2-2\sqrt{2})x=0 \qquad \text{vagy} \qquad x^2+y^2+(2+2\sqrt{2})x=0.$$

(A feladat sokféleképpen oldható meg. Keressen más módszereket is.)

4. Az egyenlet gyökei akkor valós számok, ha az egyenlet D diszkriminánsa nem negatív, azaz ha

$$(2-2m)^2-4\cdot 2\cdot(m^2-4m+1)\geq 0, \quad \text{azaz ha} \quad 3-2\sqrt{2}\leq m\leq 3+2\sqrt{2}.$$

Most $x_1x_2=\dfrac{m^2-4m+1}{2}\equiv\dfrac{1}{2}(m-2)^2-\dfrac{3}{2}$, így az m-re vonatkozó feltételből $(m-2)$-re

$$1-2\sqrt{2}\leq m-2\leq 1+2\sqrt{2}, \quad \text{tehát} \quad 0\leq(m-2)^2\leq(1+2\sqrt{2})^2.$$

Így

$$-\frac{3}{2}\leq\frac{1}{2}(m-2)^2-\frac{3}{2}=x_1x_2\leq\frac{1}{2}(1+2\sqrt{2})^2-\frac{3}{2}=3+2\sqrt{2}.$$

x_1x_2 legkisebb értéke tehát $-\dfrac{3}{2}$ (ha $m=2$), legnagyobb értéke $3+2\sqrt{2}$, ha $m=3+2\sqrt{2}$.

5. Ha $x>0$, $y>0$ és $x+y=4$, akkor az $x+y\geq 2\sqrt{xy}$ azonos egyenlőtlenség alkalmazásával $4\geq 2\sqrt{xy}$, tehát $xy\leq 4$, $\dfrac{1}{xy}\geq\dfrac{1}{4}$ és így

$$\left(3+\frac{1}{x}\right)\left(3+\frac{1}{y}\right)=9+\frac{1}{xy}+3\cdot\frac{x+y}{xy}=9+\frac{13}{xy}\geq 9+\frac{13}{4}=\left(\frac{7}{2}\right)^2.$$

Az egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $x=y=2$.

6. A háromszög belső szögfelezője a szemközti oldalt az őt közbezáró két oldal arányában osztja, így az ismeretlen két oldal két részét jelölje x, illetve $2x$, a keresett szög γ. A két részháromszögben felírhatjuk a koszinusztételt.

$$x^2=12^2+8^2-2\cdot 8\cdot 12\cdot\cos\frac{\gamma}{2}, 4x^2=24^2+8^2-2\cdot 8\cdot 24\cdot\cos\frac{\gamma}{2}.$$

Az egyenlő együtthatók módszerével $\cos\dfrac{\gamma}{2}=\dfrac{1}{2}$, $x=4\sqrt{7}$. Így $\dfrac{\gamma}{2}=60°$, $\gamma=120°$; a harmadik oldal $3x=12\sqrt{7}$ egység. (A feladat más módokon is megoldható.)

7. Az *elemző* ábrán vegyük fel a P pontot az AB szakaszon belül és legyen $AP=x$, a négyzet oldalát jelölje a. (Az AB szakasz egyenesét tekintsünk olyan *számegyenesnek*, amelynek origója az A pont. Így a P pontnak az x valós szám felel meg.) Ezek szerint $PB=a-x$, $PD=\sqrt{17}$, $PC=5$, $AD=BC=a$.

Az APD és a BPC derékszögű háromszögre alkalmazhatjuk Pitagorasz tételét. $a^2+x^2=17$, $a^2+(a-x)^2=25$, ahonnan $x=\dfrac{a^2-8}{2a}$, tehát $a^2+\left(\dfrac{a^2-8}{2a}\right)^2=17$.

$5a^4-84a^2+64=0$, $a^2=16$ vagy $a^2=\dfrac{4}{5}$.

Így $a = 4$ és ekkor $x = 1$ vagy $a = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$ és ekkor $x = -\dfrac{9}{\sqrt{5}}$.

Az első esetben a P pont az AB szakaszon belül van, a második esetben az A végpontú AB félegyenes kiegészítő félegyenesén.

8. Azonos átalakításokkal ($\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$) és rendezéssel az egyenlet

$$(2\sin x + \sin y)^2 + \cos^2 y = 0$$

alakban írható, így $\cos y = 0$ és $2\sin x + \sin y = 0$. $\cos y = 0$, ha $y = \dfrac{\pi}{2} + l\pi$, $l \in \mathbf{Z}$.
Ha $y = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, akkor $\sin y = 1$, $\sin x = -\dfrac{1}{2}$, így $x = -\dfrac{\pi}{6} + 2n\pi$ vagy $x = -\dfrac{5\pi}{6} + 2n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$;
ha $y = \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, akkor $\sin y = -1$, $\sin x = \dfrac{1}{2}$, így $x = \dfrac{\pi}{6} + 2n\pi$ vagy $x = \dfrac{5\pi}{6} + 2n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$.
(Más módokon is megoldható a feladat.)

Rábai Imre