Marosvásárhely, 1999. december 11.

Az emlékversenyre évente, decemberben kerül sor a marosvásárhelyi *Bolyai Farkas Líceumban*. Iskolánk vezetősége és matematika tanárai így állítanak emléket a líceum egykori diákjának, a nyolcvanas években rendezett számos helyi és országos matematika verseny díjazottjának, Hegyi Lajosnak, aki – máig is tisztázatlan körülmények között – hősi halált halt 1989. december 21-én, városunk főterén.

A idei versenyen Erdély nagyhírű iskoláiból közel száz, matematikát kedvelő és színvonalasan művelő diák vett részt. Sajnos a verseny kezdetekor vasutassztrájk bénította meg részlegesen a közlekedést, így néhány csapat nem tehetett eleget a meghívásnak.

Az ünnepélyes eredményhirdetést *Fodor Imre,* Marosvásárhely polgármestere is megtisztelte jelenlétével.

Díjazottak:

IX. osztály

I. díj: *Dáné Andrea*, **Bolyai Farkas Líceum, Marosvásárhely;**
II. díj: *Szilágyi Márta*, **Báthory István Líceum, Kolozsvár;**
III. díj: *Sebe Attila*, **Báthory István Líceum, Kolozsvár;**

Dicséretek: *Kiss Zsuzsa*, **Tamási Áron Líceum, Székelyudvarhely;** *Klein Cristian*, **Al. Papiu Ilarian Nemzeti Kollégium, Marosvásárhely;** *Orbán György*, **Báthory István Líceum, Kolozsvár;** *Kovács Károly*, **Tamási Áron Líceum, Székelyudvarhely.**

X. osztály

I. díj: *Buksa Szilárd*, **Baróti Szabó Dávid Líceum, Barót;**
Il. díj: *Bâtiu Daria*, **Al. Papiu Ilarian Nemzeti Kollégium, Marosvásárhely;**
III. díj: *Pol Marius*, **Al. Papiu Ilarian Nemzeti Kollégium, Marosvásárhely;**

Dicséretek: *Sipos István*, **Ady Endre Líceum, Nagyvárad;** *Berekméri Melinda*, **Bolyai Farkas Líceum, Marosvásárhely;** *Gyöngyösi Éva*, **Tamási Áron Líceum, Székelyudvarhely;** *László Tamás*, **Tamási Áron Líceum, Székelyudvarhely;** *Szőcs Emese*, **Márton Áron Líceum, Csíkszereda.**

XI. osztály

I. díj: *Dávid László*, **Bolyai Farkas Líceum, Marosvásárhely;**
II. díj: *Măşăşan Alexandru*, **Al. Papiu Ilarian Nemzeti Kollégium, Marosvásárhely;**
III. díj: *Csibi Attila*, **Bolyai Farkas Líceum, Marosvásárhely;**

Dicséretek: *Babu Andreea*, **Al. Papiu Ilarian Nemzeti Kollégium, Marosvásárhely;** *Mátis Anikó*, **Apáczai Csere János Líceum, Kolozsvár;** *Ogrean Mihai*, **Al. Papiu Ilarian Nemzeti Kollégium, Marosvásárhely.**

XII. osztály

I. díj: *Demeter Albert*, **Orbán Balázs Líceum, Székelykeresztúr;**
I. díj: *Stoica Emanuel*, **Al. Papiu Ilarian Nemzeti Kollégium, Marosvásárhely;**
III. díj: *Mátis István*, **Apáczai Csere János Líceum, Kolozsvár;**
III. díj: *Popa Daniel*, **Al. Papiu Ilarian Nemzeti Kollégium, Marosvásárhely;**

Dicséretek: *Kósa Gergely*, **Al. Papiu Ilarian Nemzeti Kollégium, Marosvásárhely;** *Molnár Róbert*, **Németh László Líceum, Nagybánya;** *Tamás Levente*, **Bolyai Farkas Líceum, Marosvásárhely;** *Găbudean Călin*, **Al. Papiu Ilarian Nemzeti Kollégium, Marosvásárhely.**

Dáné Károly

A III. Hegyi Lajos Emlékverseny feladatai

IX. osztály

1. Egy hétjegyű telefonszámot ($a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7$) megjegyezhetőnek nevezünk, ha az $a_1a_2a_3$ számjegysorozat megegyezik az $a_4a_5a_6$ vagy $a_5a_6a_7$ számjegysorozatok valamelyikével (esetleg mindkettővel). Minden egyes a_i a 0, 1, 2, ..., 9 számjegyek bármelyike lehet. Hány megjegyezhető telefonszám van összesen?

2. Határozzátok meg az x, y és z valós számokat, ha:

$$\sqrt{x}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-2}=\frac{x+y+z}{2}.$$

3. Oldjátok meg az egész számok halmazán a következő egyenletet:

$$(x+y)^2-4(x-y)=13.$$

4. Adott a síkban két háromszög: ABC **és** $A'B'C'$**, súlypontjaik** G**, illetve** G'**. Bizonyítsátok be, hogy:**
a) $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=3\cdot\overrightarrow{GG'}$;
b) ha $\overrightarrow{A'B}=k\cdot\overrightarrow{A'C}$, $\overrightarrow{B'C}=k\cdot\overrightarrow{B'A}$, $\overrightarrow{C'A}=k\cdot\overrightarrow{C'B}$ ($k\in\mathbf{R}$, $k\neq 1$)**, akkor** G **és** G' **egybeesnek.**

X. osztály

1. Bizonyítsátok be, hogy ha z_1, z_2, **...**, $z_n\in\mathbf{C}$, **és** $|z_1|=|z_2|=\cdots=|z_n|$, **akkor**

$$\left(1+\frac{z_2}{z_1}\right)\left(1+\frac{z_3}{z_2}\right)\cdot\dots\cdot\left(1+\frac{z_n}{z_{n-1}}\right)\left(1+\frac{z_1}{z_n}\right)\in\mathbf{R}.$$

2. Oldjátok meg a következő egyenletet: $\log_3(2^x+1)=\log_2(3^x-1)$.

3. Két szabályos háromoldalú gúla alapja közös. Két oldalél által bezárt szög mértéke az egyik gúlán α**, a másikon** β**. A közös alapháromszög köré írt kör sugara a két gúla magasságának mértani középarányosa. Igazoljátok, hogy:**

$$\cos\alpha+\cos\beta=\frac{1}{2}.$$

4. Egy konvex négyszögben AB **és** CD **szemben fekvő oldalak. Mindkettőt 3 egyenlő részre osztjuk, és a megfelelő szemben fekvő osztópontokat összekötjük. (A keletkezett szakaszok nem metszik egymást.) Bizonyítsuk be, hogy az így keletkezett 3 négyszög között van olyan, amelyiknek a területe egyenlő az adott négyszög területének egyharmadával.**

XI. osztály

1. Adott egy $n\times n$ **mezőből álló sakktábla. Legkevesebb hány mezőt kell találomra kifesteni hogy biztosan létezzen legalább egy teljesen befestett sor vagy oszlop?**

2. Legyen $A\in\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$; $A^2=0_n$. **(**A $n\times n$**-es valós mátrix, a négyzete az azonosan 0 mátrix.) Igazoljátok, hogy:**
a) $\det(A+I_n)\geq 0$;
b) ha n **páratlan szám, akkor** $\det(A+I_n)\geq\det(A-I_n)$.

3. Legyen $x_n=\sin\pi\sqrt[3]{n^3+n+\pi}$, $y_n=\dfrac{x_{n+1}}{x_n}$, $z_n=nx_n$ $(n\in\mathbf{N}^*)$. **Tanulmányozzátok az** $(x_n)_{n>0}$, $(y_n)_{n>0}$ **és** $(z_n)_{n>0}$ **sorozatok konvergenciáját, és amelyiknek van, számítsátok ki a határértékét!**

4. Adott $a_0=a_1=0$, $a_{n+1}-2a_n+a_{n-1}=n$, $\forall n\in\mathbf{N}^*$. **Bizonyítsátok be, hogy a** $b_n=\sqrt[n]{\dfrac{a_n}{n(n-1)}}$ **összefüggéssel értelmezett** $(b_n)_{n\geq 2}$ **sorozat konvergens, és számítsátok ki a határértékét!**

XII. osztály

1. Az $f:(0,\pi)\to\mathbf{R}$, $f(x)=\dfrac{\sin 2nx}{\sin x}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$ **függvény egyik primitív függvénye** F**. Bizonyítsátok be, hogy ha** $\lim\limits_{\substack{n\to 0\\ n>0}}F(x)=0$**, akkor** $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=2\left(1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}-\dots+\dfrac{(-1)^{n+1}}{2n-1}\right)$.

2. Legyen α_1, α_2, **...**, $\alpha_n\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, **és** $s_n=\sin^2\alpha_1+\sin^2\alpha_2+\dots+\sin^2\alpha_n$. **Bizonyítsátok be, hogy**

$$\operatorname{tg}^2\alpha_1+\operatorname{tg}^2\alpha_2+\dots+\operatorname{tg}^2\alpha_n\geq\frac{n\cdot s_n}{n-s_n}\qquad(n\in\mathbf{N}^*).$$

3. Legyen $(G,\,\cdot\,)$ **egy csoport, amely rendelkezik a következő tulajdonsággal:**

$$\exists a\in G\qquad \textbf{úgy, hogy } \forall x\in G \textbf{ esetén } a\cdot x^n\cdot a=x.$$

Bizonyítsátok be, hogy, ha $n=2$**, akkor** G **csak egy elemből áll, ha pedig** $n=3$**, akkor** G **kommutatív csoport.**

4. Hány megoldása van az egész számok halmazában az $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{10^n}$ **egyenletnek** $(n\in\mathbf{N}^*)$**?**