Tegyük fel először, hogy $0 \le a < b$. Be fogjuk látni, hogy n és k alkalmas választásával $\sqrt{n} - \sqrt{k}$ lehet „elég kicsi” és „elég nagy” is.

Legyen i természetes szám, ekkor

$$0 < \sqrt{i+1} - \sqrt{i} = \frac{1}{\sqrt{i+1} + \sqrt{i}} < \frac{1}{2\sqrt{i}}. \tag{2}$$

Innen látható, hogy ha

$$i > \frac{1}{4(b-a)^2} \quad \text{akkor} \quad \sqrt{i+1} - \sqrt{i} < b - a,$$

azaz két szomszédos természetes szám négyzetgyökének különbsége lehet „elég kicsi”. Megmutatjuk, hogy alkalmas m természetes számmal megszorozva ez az érték a és b között lesz.

Legyen m a legkisebb egész, amelyre $m\,(\sqrt{i+1} - \sqrt{i})$ nagyobb a-nál. Akkor m-re teljesül, hogy

$$A = (m-1)(\sqrt{i+1} - \sqrt{i}) \le a \quad \text{és} \quad B = m\,(\sqrt{i+1} - \sqrt{i}) > a.$$

Ekkor $m\,(\sqrt{i+1} - \sqrt{i}) < b$, hiszen $B - A = \sqrt{i+1} - \sqrt{i} < b - a =$. Mivel $m\,(\sqrt{i+1} - \sqrt{i}) = \sqrt{m^2(i+1)} - \sqrt{m^2 i}$ megtaláltuk a keresett n-et és k-t $m^2(i+1)$, illetve $m^2 i$ alakban.

Ha $a < b \le 0$, akkor $-a > -b \ge 0$, ezekhez van olyan n, k természetes szám, hogy $-a > \sqrt{n} - \sqrt{k} > -b$, ahonnan $a < \sqrt{k} - \sqrt{n} < b$ következik.

Végül $a < 0 < b$ esetben minden $n = k$ választás megfelel.

Spissich László (Pápa, Türr I. Gimn., IV. o. t.)