1. Ha az x_0 szám közös gyöke az $f(x)=0$ és a $g(x)=0$ egyenleteknek, akkor minden A, B valós számra gyöke az $Af(x)+Bg(x)=0$ egyenletnek is, hiszen $f(x_0)=0$ és $g(x_0)=0$, tehát $Af(x_0)+Bg(x_0)=0$. Mivel az egyenleteknek két közös gyöke van, azért ezek a gyökök közös megoldásai az

$$(x^3+bx-12)-(x^3-ax^2+18)=0 \quad \text{és a} \quad 2(x^3-ax^2+18)+3(x^3+bx-12)=0,$$
$$ax^2+bx-30=0, \qquad\qquad x(5x^2-2ax+3b)=0$$

egyenleteknek is.

Az $a=0$ nem lehetséges, hiszen akkor nem volna két közös gyök. Az $x=0$ egyik egyenletnek sem gyöke. Így

$$x^2+\frac{b}{a}x-\frac{30}{a}\equiv x^2-\frac{2}{5}ax+\frac{3b}{5},$$

ahonnan $\dfrac{b}{a}=-\dfrac{2}{5}a$ és $-\dfrac{30}{a}=\dfrac{3b}{5}$, tehát $a=5$, $b=-10$, a közös gyökök az $x^2-2x-6=0$ egyenlet gyökei, $x_1=1+\sqrt{7}$, $x_2=1-\sqrt{7}$.

A harmadik gyökök $x_3=3$, illetve $x_4=-2$, hiszen $\dfrac{x^3-5x^2+18}{x^2-2x-6}=x-3$ és $\dfrac{x^3-10x+12}{x^2-2x-6}=x+2$.

2. Jelölje T a háromszög területét. Ekkor $\sin\alpha=\dfrac{2T}{bc}$, $\sin\beta=\dfrac{2T}{ca}$, $\sin\gamma=\dfrac{2T}{ab}$ és

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{\frac{2T}{bc}}=\frac{b^2+c^2-a^2}{4T},$$
$$\operatorname{ctg}\beta=\frac{a^2+c^2-b^2}{4T}, \qquad \operatorname{ctg}\gamma=\frac{a^2+b^2-c^2}{4T},$$

tehát $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=2T\left(\dfrac{1}{ab}+\dfrac{1}{bc}+\dfrac{1}{ca}\right)$ és

$$\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\gamma=\frac{1}{4T}(b^2+c^2-a^2+a^2+c^2-b^2+a^2+b^2-c^2)=\frac{1}{4T}(a^2+b^2+c^2).$$

Ezekből következik az állítás.

3. Az $x>0$, $xa^2\neq 1$ és az $\dfrac{x}{\sqrt{a}}\neq 1$ feltételeknek teljesülnie kell. Ha $a=1$, akkor

$$\log_x x^3+\log_x\sqrt{x}\equiv 3+\frac{1}{2}>2,$$

tehát ekkor minden $x>0$, $x\neq 1$ szám megoldás. Ha $a\neq 1$ $(a>0)$, akkor azonos átalakításokkal, majd rendezéssel

$$\frac{3\log_a x}{2+\log_a x}+\frac{\frac{1}{2}\log_a x}{\log_a x-\frac{1}{2}}-2>0,$$
$$\frac{\frac{3}{2}(\log_a x-1)\left(\log_a x-\frac{4}{3}\right)}{(\log_a x+2)\left(\log_a x-\frac{1}{2}\right)}>0.$$

Ez utóbbi egyenlőtlenség akkor teljesül, ha $\log_a x<-2$ vagy $\dfrac{1}{2}<\log_a x<1$ vagy $\log_a x>\dfrac{4}{3}$.

Ha $a>1$, akkor a megoldások: $0<x<\dfrac{1}{a^2}$ vagy $\sqrt{a}<x<a$ vagy $x>a^{\frac{4}{3}}$;

ha $0<a<1$, akkor a megoldások: $x>\dfrac{1}{a^2}$ vagy $a<x<\sqrt{a}$ vagy $0<x<a^{\frac{4}{3}}$.

4. *a*) Ismeretes, hogy $4s_a^2=2(b^2+c^2)-a^2$, $4s_b^2=2(a^2+c^2)-b^2$ és $4s_c^2=2(a^2+b^2)-c^2$.

Ha $2b^2=a^2+c^2$, akkor egyrészt $2s_b^2=\dfrac{2(a^2+c^2)-b^2}{2}=\dfrac{3b^2}{2}$, másrészt

$$s_a^2+s_c^2=\frac{1}{4}\left((2b^2+2c^2-a^2)+(2a^2+2b^2-c^2)\right)=\frac{1}{4}(4b^2+a^2+c^2)=\frac{1}{4}\cdot 6b^2=\frac{3b^2}{2},$$

így valóban $2s_b^2=s_a^2+s_c^2$.

Megfordítva, ha $2s_b^2=s_a^2+s_c^2$, akkor $\dfrac{2a^2+2c^2-b^2}{2}=\dfrac{1}{4}(2b^2+2c^2-a^2+2a^2+2b^2-c^2)$, ahonnan $2b^2=a^2+c^2$.

b) Ha $a\geq b\geq c$, akkor $s_c\geq s_b\geq s_a$.

Ismeretes, hogy ha az ABC háromszög területe T_1, a súlyvonalakból mint oldalakból alkotott háromszög területe T_2 területegység, akkor $\dfrac{T_2}{T_1}=\dfrac{3}{4}$.

Ha a két háromszög hasonló, akkor $\frac{T_2}{T_1} = \frac{s_a^2}{c^2} = \frac{s_b^2}{b^2} = \frac{s_c^2}{a^2} = \frac{3}{4}$, tehát $\frac{s_a^2}{c^2} = \frac{2b^2+2c^2-a^2}{4c^2} = \frac{3}{4}$, ahonnan $2b^2 = a^2 + c^2$.

Ha $2b^2 = a^2 + c^2$, akkor $\frac{s_a^2}{c^2} = \frac{2b^2+2c^2-a^2}{4c^2} = \frac{3c^2}{4c^4} = \frac{3}{4}$, azaz $\frac{s_a}{c} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Hasonlóan $\frac{s_b}{b} = \frac{s_c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, tehát a két háromszög hasonló.

Rábai Imre