

1. Oldja meg a valós számpárok halmazán (\mathbf{R}^2) a következő egyenletrendszert:

$$x^2 - y^2 = 2(x - y), \quad x^2 + y^2 = 5(x + y).$$

2. Egy mértani sorozat első és ötödik elemének szorzata 144, a második és a negyedik elem különbsége 18. Számítsa ki a sorozat első elemét és hányadosát.

3. Írja fel annak a körnek az egyenletét, amely az y tengelyt az origóban érinti, és érinti az $x + y = 1$ egyenletű egyenest is.

4. Állapítsa meg, hogy az m valós paraméter mely értékeire lesznek a

$$2x^2 + (2 - 2m)x + (m^2 - 4m + 1) = 0$$

egyenlet gyökei valósak, és állapítsa meg ezekre az m értékekre az $x_1 \cdot x_2$ kifejezés legnagyobb és legkisebb értékét, ahol x_1 és x_2 az egyenlet gyökeit jelentik.

5. Legyen $x > 0$, $y > 0$ és $x + y = 4$. Igazolja, hogy

$$\left(3 + \frac{1}{x}\right) \left(3 + \frac{1}{y}\right) \geq \left(\frac{7}{2}\right)^2.$$

6. Egy háromszög két oldalának hossza 12, illetve 24 egység. A közbezárt szög szögfelezője 8 egység. Számítsa ki a két oldal által bezárt szöget és a harmadik oldalt.

7. Az $ABCD$ négyzet AB oldalegyenesének egy P pontja a C , illetve a D csúcsoktól 5, illetve $\sqrt{17}$ egység távolságra van. Mekkora a négyzet oldala? Hol helyezkedik el a P pont?

8. Oldja meg a valós számpárok halmazán a

$$4 \cos^2 x - 4 \sin x \cdot \sin y - 5 = 0$$

kétismeretlenes egyenletet.