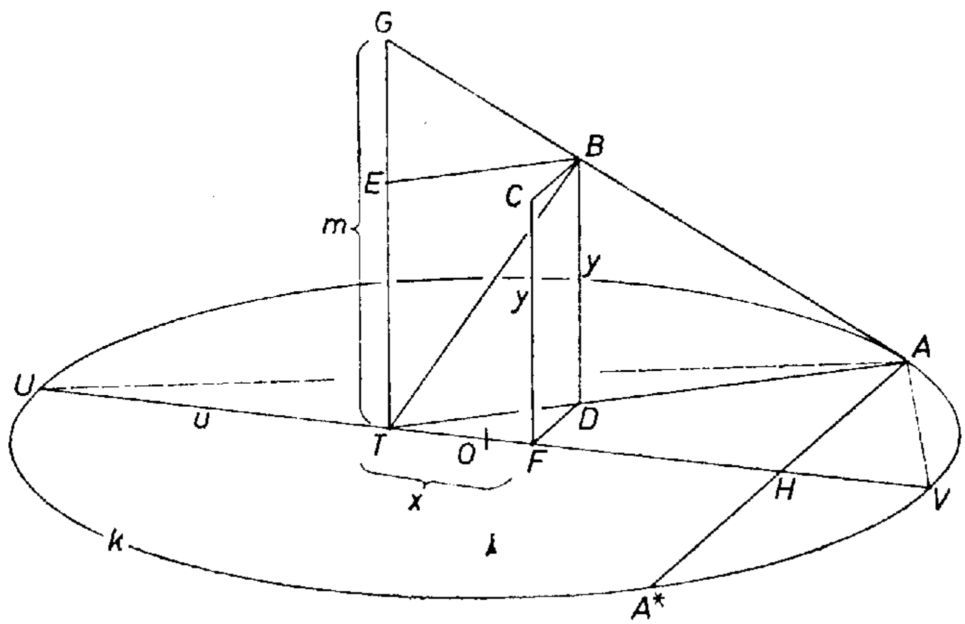
I. megoldás. Legyen a gúla alapidomának egy tetszőleges csúcsa az O középpontú, r sugarú k kör kerületén $A_i (i=1,2,\ldots)$, a gúla magassága $GT=m$, és T vetülete GA_i-n B_i (1. ábra).



1. ábra

Minden ilyen vetület rajta van a GT átmérő fölötti Thalész–gömbön, így elég azt belátni, hogy a B pontok egy síkban vannak. Csak a nemtriviális esettel foglalkozunk, T nem azonos O-val. Ekkor a kérdéses sík nem párhuzamos az alappal, hiszen van olyan i, j indexpár, hogy $TA_i > TA_j$, így pedig B_i magasabban van, mint B_j. (Nyilván legalább 4 csúcsa legyen az alapidomnak.)

Nem változtat az állításon, ha minden A_i-nek TO-ra való A_i^* tükörképét is alapcsúcsnak vesszük. Így $B_iB_i^*$ merőleges a $GTO=S$ szimmetriasíkra, ezért a kérdéses sík is, elég tehát azt belátnunk, hogy a B_i vetületek S-en levő C_i vetületei egy egyenesen sorakoznak. Evégett megmutatjuk a TO, TG tengelyekkel meghatározott koordinátarendszerben, hogy C koordinátái között elsőfokú kapcsolat áll fenn.

Legyen B vetülete TA-ra és TG-re D, ill. E, továbbá TO-n D és C közös vetülete F, és A vetülete H, végül legyenek TO-nak k-n levő pontjai U és V úgy, hogy $TU<TV$. Derékszögű háromszögek, hasonlóságok felhasználásával (a tengelyirányú szakaszokat előjellel együtt értve):

(1)
$$TF=x=\frac{TD}{TA}TH=\frac{EB}{TA}TH=\frac{EG}{TG}TH=\frac{m-y}{m}TH;$$

$$\begin{aligned}HA^2=TA^2-TH^2=UH\cdot HV=(TH-TU)(TU+2r-TH)=\\=2\cdot TH(TU+r)-TH^2-TU^2-2r\cdot TU,\end{aligned}$$

és innen $TU=u$ jelöléssel

(2)
$$TH=\frac{TA^2+u(2r+u)}{2(r+u)};$$

végül a BTD és az ABD háromszögnek AGT-hez való hasonlóságából

$$TD=\frac{my}{TA},\quad \frac{y}{m}=\frac{TA-TD}{TA}=\frac{TA-\dfrac{my}{TA}}{TA}=\frac{TA^2-my}{TA^2},$$

(3)
$$TA^2=\frac{m^2y}{m-y}.$$

Ezt (2)-be, majd (2)-t (1)-be helyettesítve kapjuk állításunkat:

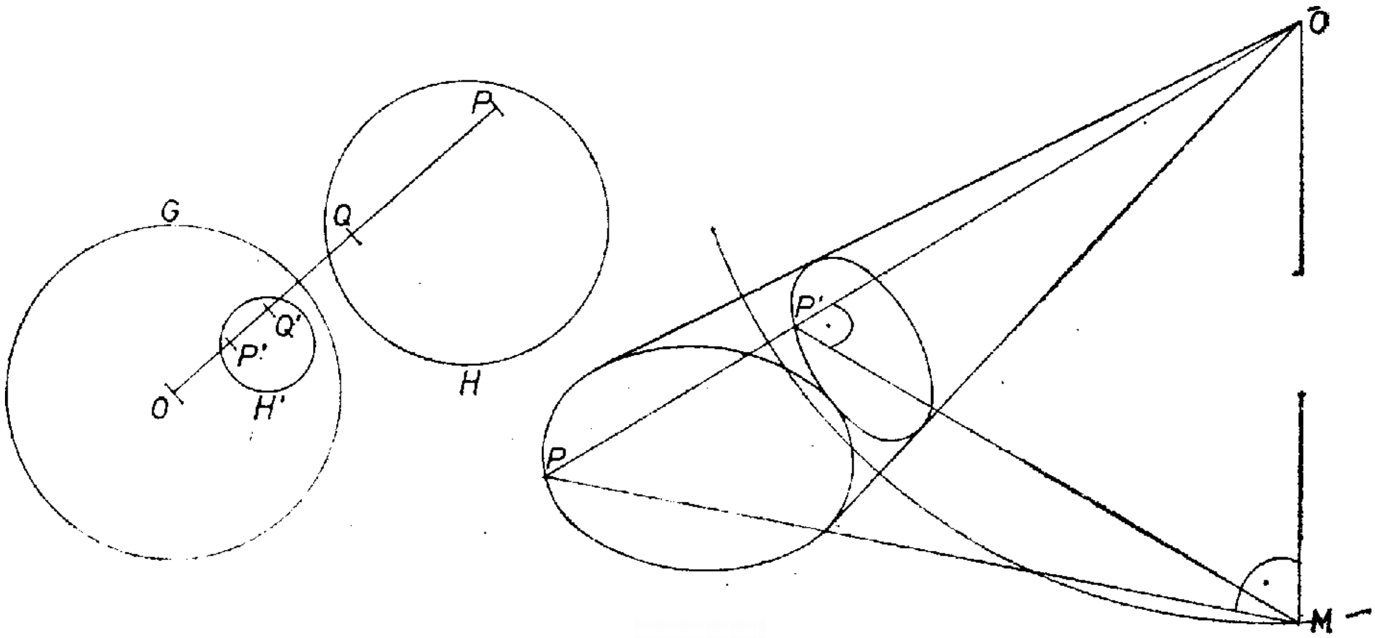
$$x=\frac{m-y}{m}\cdot\frac{\dfrac{m^2y}{m-y}+u(2r+u)}{2(r+u)}=\frac{(m^2-u^2-2ru)y+mu(2r+u)}{2m(r+u)}$$

(m, r, u állandók).

Megjegyzés. A k kör és a G pont egy (ferde) körkúpot határoz meg. Ebben a felfogásban azt kaptuk, hogy ferde kúpnak olyan körmetszete is van, amelynek síkja nem párhuzamos az alapsíkkal, és az ezzel párhuzamos síkok szintén kört metszenek ki a kúpból. Kúpunknak az UVG szög felezőjén át S-re merőlegesen álló sík is szimmetriasíkja.

II. megoldás. Felhasználjuk a gömbre vonatkozó inverzió fogalmát és egy tulajdonságát. Legyen adott egy O középpontú, r sugarú G gömb. G-re vonatkozó inverziónak nevezzük azt a transzformációt, amely a tér egy O-tól különböző P pontjához az OP félegyenesnek azt a P' pontját rendeli, amelyre $OP' \cdot OP = r^2$.

Megmutatjuk, hogy az inverzió egy, a középponton át nem menő H gömböt egy H' gömbbe visz át. Legyen H egy pontja P, legyen az OP egyenesnek és H-nak a másik metszéspontja Q, ha ez létezik, illetve legyen $Q = P$, ha OP érinti H-t. Legyen P' a P-nek G-re vonatkozó inverz képe (2. ábra).



2. ábra

Legyen q az O-nak H-ra vonatkozó hatványa, azaz $OP \cdot OQ = q$. Ekkor

$$\frac{OP'}{OQ} = \frac{OP' \cdot OP}{OQ \cdot OP} = \frac{r^2}{q}.$$

Tehát P' rajta lesz H-nak O középpontú, r^2/q arányú nagyítottján, vagyis H inverz képe a H' gömbön lesz, ahol H' a H-nak r^2/q arányú, O középpontú nagyítottja.

Könnyen belátható, hogy az inverzió H és H' pontjai között egy–egy értelmű megfeleltetést létesít. Ezt tudva megmutatjuk, hogy az inverzió egy, a középponton át nem menő k kört egy k' körbe visz át. Legyenek H_1 és H_2 az O-n át nem menő, k-ra illeszkedő, különböző gömbök; ezek G-re vonatkozó inverz képe H_1', illetve H_2' gömbök, így k inverz képe a H_1' és H_2' metszete. Az inverzió kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést létesít k, valamint H_1' és H_2' közös része között, ezért a H_1' és H_2' gömbök közös része, a k' vonal egy kör. Tehát k inverz képe, k', valóban kör.

Ezek után rátérünk a feladat állításának bizonyítására. Legyen O a gúla csúcsa, M a magasság talppontja, P az alapidom egyik csúcsa, P' az M-ből OP-re bocsátott merőleges talppontja. Az OMP derékszögű háromszögben $OP \cdot OP' = OM^2$, P' tehát P inverze az O középpontú, OM sugarú gömbre vonatkozólag (3. ábra). Láttuk, hogy az inverzió az alapidom köré írt kört körbe viszi, P' éppen ezen a körön lesz. Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

Csikós Balázs (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., III. o. t.) dolgozata alapján

Megjegyzés. Az állítás lényegében azonos a *Maklári József:* Körérintési szerkesztések és alkalmazásaik c. középiskolai szakköri füzet (Tankönyvkiadó, Bp., 1970) 78. oldalán szereplő tétellel.