1. Tükrözzük az ABC háromszög S súlypontját az AB oldal C_1 felezőpontjára, a tükörkép legyen S_c. Az ASS_c háromszög oldalai az ABC háromszög súlyvonalainak a kétharmada, és területe az ABC háromszög területének a harmada. Az ASS_c háromszög derékszögű, hiszen $1^2 + 2,4^2 = 2,6^2$. Ha az ABC háromszög területét T-vel jelöljük, akkor $\dfrac{T}{3} = \dfrac{\left(\frac{2}{3} \cdot 1\right) \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 2,4\right)}{2}$, ahonnan $T = 1,6$ területegység.

2. Az egyenlet diszkriminánsa $D = 4^2 - 4(3 + 2a - a^2) = 4(a-1)^2$, így az egyenlet gyökei $x_1 = a + 1$, $x_2 = 3 - a$.
Ha $x_1 = 2x_2$, akkor $a + 1 = 6 - 2a$, $a = \dfrac{5}{3}$, ha $x_2 = 2x_1$, akkor $2a + 2 = 3 - a$, $a = \dfrac{1}{3}$.

3. $y^{\log_2 x} \equiv x^{\log_2 y}$ $(x > 0,\ y > 0)$, hiszen mindkét mennyiség pozitív és 2-es alapú logaritmusuk egyenlő.
A második egyenletből $\dfrac{x}{y} = 2$ $(x > 0,\ y > 0)$, az első egyenletből $x^{\log_2 y} = 1$, ahonnan $\log_2 y \cdot \log_2 x = \log_2 1 = 0$.
Ha $\log_2 x = 0$, akkor $x_1 = 1$ és így $y_1 = \dfrac{1}{2}$, ha $\log_2 y = 0$, akkor $y_2 = 1$ és így $x_2 = 2$.

4. Ha $m = 5$, akkor a kifejezés elsőfokú $(-3x + 8)$, tehát felvesz negatív értékeket is.
Ha $m \neq 5$, akkor a kifejezés pontosan másodfokú, így akkor vesz fel minden valós x-re pozitív értéket, ha $5 - m > 0$ és a polinom diszkriminánsa negatív, azaz $9 - 4(5 - m)(m + 3) > 0$, azaz $(m-1)^2 < \dfrac{55}{4}$, $|m - 1| < \dfrac{\sqrt{55}}{2}$, tehát $1 - \dfrac{\sqrt{55}}{2} < m < 1 + \dfrac{\sqrt{55}}{2}$.
Mivel $1 + \dfrac{\sqrt{55}}{2} < 5$, ezért a feltétel akkor teljesül, ha
$$1 - \frac{\sqrt{55}}{2} < m < 1 + \frac{\sqrt{55}}{2}.$$

5. Legyen a $60°$-os szöget közrezáró két oldal a és b, a harmadik oldal c.
a) A feltétel szerint $4\sqrt{3} = \dfrac{ab\sqrt{3}}{4}$, $ab = 16$. Mivel $a > 0$, $b > 0$ esetén $a + b \geq 2\sqrt{ab}$, ezért most $a + b \geq 8$, így akkor a legkisebb, ha $a + b = 8$ és $a = b$, tehát $a = 4$, $b = 4$, amiből következik, hogy minden szög $60°$, így $c = 4$ egység.
b) A c akkor a legkisebb, ha c^2 $(c > 0)$ a legkisebb. Most $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$ és $2ab\cos\gamma = 2 \cdot 16 \cdot \dfrac{1}{2} = 16$, tehát $c^2 = a^2 + b^2 - 16$.
Az $(a-b)^2 \geq 0$ egyenlőtlenségből $a^2 + b^2 \geq 2ab$ adódik, tehát most $a^2 + b^2 \geq 2 \cdot 16$, ahol az egyenlőség $a = b$ esetén teljesül; most $a^2 + b^2 = 16$, $a = b = 4$.
A c^2 legkisebb értéke 16, a c legkisebb értéke 4, így a háromszög egyenlő oldalú.

6. Az AB egyenes egyenlete $4x + y - 4 = 0$, az AB oldal hossza $AB = \sqrt{17}$ egység; az AB oldalhoz tartozó m magasságra $\sqrt{17} \cdot m = 2 \cdot 13$, $m = \dfrac{26}{\sqrt{17}}$.
A $C(c; 6)$ pont a $4x + y - 4 = 0$ egyenletű egyenestől $m = \dfrac{26}{\sqrt{17}}$ egység távolságra van, tehát
$$\frac{26}{\sqrt{17}} = \frac{|4c + 6 - 4|}{\sqrt{17}}, \qquad \text{ahonnan} \qquad |4c + 2| = 26$$
és így $c_1 = 6$ vagy $c_2 = -7$.

7. Mivel $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ azért $(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 = 1$. Felhasználva még, hogy $\sin^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$,
$$\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - \frac{1}{2} \cdot 4\sin^2 x \cdot \cos^2 x = 1 - \frac{1}{2} \cdot \sin^2 2x = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \cos 4x}{2} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4x.$$
A feladat kérdésére térve, $\dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{4}\cos 4x \geq \dfrac{5}{8}$ pontosan akkor, ha $\cos 4x \geq -\dfrac{1}{2}$; $-\dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi \leq 4x \leq \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.
Az egyenlőtlenség megoldásai:
$$-\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, \qquad k \in \mathbf{Z}.$$

8. Tegyük fel, hogy az egyenletnek van megoldása. Ekkor
$$\sqrt{a - x} = 1 - \sqrt{-x}, \qquad a - x = 1 - x - 2\sqrt{-x}, \qquad \sqrt{-x} = \frac{1 - a}{2},$$

így az egyenletnek csak $x_0 = -\left(\frac{a-1}{2}\right)^2$ *lehet* megoldása. x_0 akkor megoldása az egyenletnek, ha behelyettesítve egyenlőséget kapnuk.

$$\sqrt{a+\left(\frac{a-1}{2}\right)^2}+\sqrt{\left(\frac{a-1}{2}\right)^2}=1, \quad \text{azaz ha} \quad |a+1|+|a-1|=2.$$

Ez utóbbi egyenlet megoldásai a $-1 \le a \le 1$ számok. Az adott egyenletnek tehát $-1 \le a \le 1$ esetén van megoldása és a megoldás $x = -\left(\frac{a-1}{2}\right)^2$.

Rábai Imre