1. A háromszög kerülete $2s=70,4$ egység, így $s=35,2$ egység. A háromszög területe Heron képlettel számolva, $T^2=35,2\cdot 2,2\cdot 26,4\cdot 6,6$, ahonnan $T^2=(116,16)^2$, tehát $T=116,16$ területegység.

Ismeretes, hogy a háromszögbe írt kör sugara $\varrho=\dfrac{T}{s}$, azaz most $\varrho=\dfrac{116,16}{35,2}=3,3$ egység.

(A háromszög területét és a beírható kör sugarát más módon is kiszámíthatjuk. Hogyan?)

2. Az egyenletnek minden $-2\le x\le 3$ valós számra van értelme. Észrevehető, hogy

$$11+x+6\sqrt{x+2}=(x+2)+6\sqrt{x+2}+9=\left(\sqrt{x+2}+3\right)^2 \qquad \text{és}$$
$$4-x+2\sqrt{3-x}=(3-x)+2\sqrt{3-x}+1=\left(\sqrt{3-x}+1\right)^2.$$

Mivel $\sqrt{x+2}+3>0$ és $\sqrt{3-x}+1>0$, ha $-2\le x\le 3$, $\sqrt{a^2}=|a|=a$, ha $a>0$, ezért az adott egyenlet $\sqrt{x+2}+3+\sqrt{3-x}+1=7$, azaz

$$\sqrt{x+2}+\sqrt{3-x}=3, \tag{1}$$

alakban írható. Az eddigi átalakítások ekvivalensek voltak, így az (1) egyenlet a megoldandó egyenlettel ekvivalens. Az (1) egyenlet sokféle módon megoldható. Oldjuk meg egyenletrendszerre való visszavezetéssel. Legyen $\sqrt{x+2}=y\ (\ge 0)$ és $\sqrt{3-x}=z\ (\ge 0)$, akkor $x+2=y^2$ és $3-x=z^2$, ahonnan $5=y^2+z^2$, s mivel $y+z=3$, $z=3-y$, ezért $y^2+(3-y)^2=5$, ahonnan $y=1$ vagy $y=2$.

Figyelembe véve, hogy $x=y^2-2$, ezért az adott egyenlet megoldásai $x_1=-1$ és $x_2=2$.

3. Célszerű jelöléssel az utolsó négy szám legyen $a-3t$, $a-t$, $a+t$, $a+3t$.

A feltétel szerint $4a=16$, azaz $a=4$ és $(4-3t)(4+3t)=-20$, azaz $9t^2=36$, $t=2$ vagy $t=-2$. Ha $t=2$, akkor az utolsó négy szám -2, 2, 6, 10, és így $q=-1$, tehát $a_2=2$, $a_1=-2$;

ha $t=-2$, akkor az utolsó négy szám 10, 6, 2, -2, és így $q=\dfrac{6}{10}=\dfrac{3}{5}$, tehát $a_2=\dfrac{50}{3}$, $a_1=\dfrac{250}{9}$. (Természetesen más jelöléssel is dolgozhatunk.)

4. A háromszög belső szögfelezője a szemközti oldalt az őt közrezáró két oldal arányában osztja. A két oldal aránya most $10:15=2:3$, ezért a harmadik oldal két része legyen $2x$, illetve $3x$. A két adott oldal által bezárt szög legyen α. A két részháromszögben alkalmazzuk a koszinusztételt. Így

$$4x^2=(6\sqrt{3})^2+10^2-2\cdot 6\sqrt{3}\cdot 10\cos\frac{\alpha}{2},(1)9x^2=(6\sqrt{3})^2+15^2-2\cdot 6\sqrt{3}\cdot 15\cos\frac{\alpha}{2}.(2)$$

Az (1) egyenletet (-3)-mal, a (2) egyenletet 2-vel szorozva, majd az így kapott egyenleteket összeadva $6x^2=42$, $x=\sqrt{7}$ $(x>0)$, majd ezt valamelyik egyenletbe helyettesítve $\cos\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ adódik.

Így $\dfrac{\alpha}{2}=30^\circ$, $\alpha=60^\circ$; a harmadik oldal $a=2x+3x=5x=5\sqrt{7}$ egység.

(A feladat más módokon is megoldható. Hogyan?)

5. A $P(6;10)$ ponton átmenő egyenesek egyenlete $x=6$ vagy $y-10=m(x-6)$ alakban írható, ahol $m\in\mathbf{R}$.

Az $x=6$ egyenletű egyenes az adott egyeneseket $y_1=\dfrac{8}{3}$, illetve $y_2=-\dfrac{22}{3}$ ordinátájú pontokban metszi, így az y tengelyen való vetület $|y_1-y_2|=10$, tehát ez nem megoldás. Az $y-10=m(x-6)$ egyenletű egyenes az adott két párhuzamos egyenest az

$$y_1=\frac{8m+40}{3m+4}, \qquad \text{illetve} \qquad y_2=\frac{40-22m}{3m+4}$$

ordinátájú pontokban metszi. (Itt $3m+4\ne 0$ és $m\ne 0$. Ha ugyanis $3m+4=0$ vagy $m=0$, akkor nincs megoldás.)

Azokat az m értékéket keressük, amelyekre $|y_1-y_2|=2$, azaz

$$\left|\frac{8m+40}{3m+4}-\frac{40-22m}{3m+4}\right|=2,$$

ahonnan $30|m|=2|3m+4|$. Innen $15m=3m+4$ vagy $15m=-3m-4$, azaz $m=\dfrac{1}{3}$ vagy $m=-\dfrac{2}{9}$.

A feltételeknek két egyenes felel meg:

$$y-10=\frac{1}{3}(x-6)\quad (x-3y=-24) \qquad \text{vagy} \qquad y-10=-\frac{2}{9}(x-6)\quad (2x+9y=102).$$

(A feladat más módon is megoldható. Hogyan?)

6. A $\cos 2x=1-2\sin^2 x$ azonosságot alkalmazva a

$$2\sin^2 x+(5m-7)\sin x+3m^2-9m+6=0 \tag{1}$$

egyenletet kapjuk. Az (1) egyenletnek akkor van megoldása, ha az egyenlet diszkriminánsa nemnegatív, és teljesül a $-1 \le \sin x \le 1$ egyenlőtlenség. Most $D = (5m-7)^2 - 8 \cdot (3m^2 - 9m + 6) = (m+1)^2 \ge 0$, így $\sin x = 2 - m$ vagy $\sin x = \frac{3}{2}(1-m)$.

Az $|2-m| \le 1$ és a $\frac{3}{4}|1-m| \le 1$ egyenlőtlenség közül legalább az egyik akkor teljesül, ha $\frac{1}{3} \le m \le 3$, így ezekre az m-ekre van az egyenletnek megoldása.

Ha $m = \frac{1}{3}$, akkor $\sin x = 1$; ha $m = 1$, akkor $\sin x = 1$ vagy $\sin x = 0$; ha $m = \frac{3}{2}$, akkor $\sin x = \frac{1}{2}$ vagy $\sin x = -\frac{3}{4}$; ha $m = \frac{5}{3}$, akkor $\sin x = \frac{1}{3}$ vagy $\sin x = -1$; ha $m = 3$, akkor $\sin x = -1$. Oldja meg ezeket az alapegyenleteket!

7. Az egyenlőtlenség $x > 0$, $x \ne 1$ valós számokra értelmezett. Azonosságok alkalmazásával, majd rendezéssel:

$$-2\log_4 x - 8\log_x 4 + 10 \ge 0,$$

$$\log_4 x + 4 \cdot \frac{1}{\log_4 x} - 5 \le 0,$$

$$\frac{(\log_4 x)^2 - 5 \cdot \log_4 x + 4}{\log_4 x} \le 0,$$

$$\frac{(\log_4 x - 1)(\log_4 x - 4)}{\log_4 x} \le 0.$$

Ez pontosan akkor teljesül, ha $\log_4 x < 0$ vagy $1 \le \log_4 x \le 4$. Az egyenlőtlenség megoldásai tehát: $0 < x < 1$ vagy $4 \le x \le 256$.

8. Az x^2-re másodfokú egyenletnek csak akkor lehet négy különböző valós gyöke, ha a diszkriminánsa pozitív, azaz ha

$$D = (3a+2)^2 - 4a^2 = 5a^2 + 12a + 4 = (a+2)(5a+2) > 0,$$

azaz $a < -2$ vagy $a > -\frac{2}{5}$. Most

$$x_{1,\,4}^2 = \frac{1}{2}\left(3a + 2 + \sqrt{D}\right) \quad \text{vagy} \quad x_{2,\,3}^2 = \frac{1}{2}\left(3a + 2 - \sqrt{D}\right);$$

$$x_1 = -\sqrt{\frac{1}{2}(3a+2+\sqrt{D})}, \qquad x_4 = \sqrt{\frac{1}{2}(3a+2+\sqrt{D})},$$

$$x_2 = -\sqrt{\frac{1}{2}(3a+2-\sqrt{D})}, \qquad x_3 = \sqrt{\frac{1}{2}(3a+2-\sqrt{D})}.$$

Mivel $x_1 = -x_4$, $x_2 = -x_3$ és $x_3 < x_4$, azért $-x_4$, $-x_3$, x_3, x_4 pontosan akkor egy számtani sorozat négy egymást követő eleme, ha $2x_3 = -x_3 + x_4$, azaz $3x_3 = x_4$. (Ekkor $-2x_3 = -x_4 + x_3$ is teljesül). Tehát

$$3 \cdot \sqrt{\frac{1}{2}\left(3a + 2 - \sqrt{5a^2 + 12a + 4}\right)} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(3a + 2 + \sqrt{5a^2 + 12a + 4}\right)},$$

$$\frac{9}{2}\left(3a + 2 - \sqrt{5a^2 + 12a + 4}\right) = \frac{1}{2}\left(3a + 2 + \sqrt{5a^2 + 12a + 4}\right),$$

$$8(3a+2) = 10\sqrt{5a^2 + 12a + 4},$$

$$19a^2 - 108a - 36 = 0, \qquad a = 6 \qquad \text{vagy} \qquad a = -\frac{6}{19}.$$

(Ha $a = 6$, akkor $x^4 - 20x^2 + 36 = 0$, $x^2 = 2$ vagy $x^2 = 18$, $x_1 = -3\sqrt{2}$, $x_2 = -\sqrt{2}$, $x_3 = \sqrt{2}$, $x_4 = 3\sqrt{2}$, ha $a = -\frac{6}{19}$, akkor $x^4 - \frac{20}{19}x^2 + \left(\frac{6}{19}\right)^2 = 0$, $x^2 = \frac{2}{19}$ vagy $x^2 = \frac{18}{19}$, $x_1 = -\frac{3\sqrt{2}}{19}$, $x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{19}$, $x_3 = \frac{\sqrt{2}}{19}$, $x_4 = \frac{3\sqrt{2}}{19}$.)

Megjegyzés. A negyedfokú egyenletben x^3 együtthatója nulla, így a gyökök összege nulla. Jelölje a négy gyököt $x_1 = b - 3t$, $x_2 = b - t$, $x_3 = b + t$, $x_4 = b + 3t$. Innen $4b = 0$, $b = 0$. A gyökök tehát $-3t$, $-t$ t, $3t$. Az x^2-re másodfokú egyenlet két gyöke: $x^2 = t^2$ vagy $x^2 = 9t^2$. Az egyenlet

$$(x^2 - t^2)(x^2 - 9t^2) = 0, \qquad x^4 - 10t^2x^2 + 9t^4 = 0$$

alakban írható. Hasonlítsuk össze a kitűzött egyenlettel. Ebből $9t^4 = a^2$ és $10t^2 = 3a + 2$, azaz $3t^2 = a$ vagy $3t^2 = -a$, így

$$10 \cdot \frac{a}{3} = 3a + 2 \qquad \text{vagy} \qquad 10 \cdot \left(-\frac{a}{3}\right) = 3a + 2,$$

így $a = 6$ vagy $a = -\frac{6}{19}$.

Rábai Imre