Bernhard Riemann (1826–1866), a neves német matematikus konstruálta az alábbi függvényt:

$$R(x) = 0, ha$$

x$irracionlis, \frac{1}{q}, ha$x$racionlis,$x=p$\frac{}{q}$, ($p$, q egészek, $q > 0$, $(p,\ q) = 1$.

$Az 1.braafggvnygrafikonjnaknhnypontjtbrzolja.ARiemann-fggvnytbevezetanalzisszeminriumokonszoksvizsglni;tbbekkztt$

1. ábra. A Riemann-függvény néhány pontjának ábrázolása

Folytonos függvényekről, pontosabban intervallumon folytonos függvények grafikonjáról szemléletes képünk van: ezek a görbék „a ceruza felemelése nélkül” rajzolhatók meg. Maga a folytonosság azonban „lokálisan” adható meg, egy függvény folytonosságát először adott x_0 helyen szokás definiálni. Ezek után egy f függvényt folytonosnak mondunk egy M halmazon, ha annak minden pontjában folytonos.

Az x_0-beli folytonosság pedig azt jelenti, hogy a függvény az x_0-hoz „közeli” számokat az x_0-beli függvényértékhez, $f(x_0)$-hoz „közeli” értékekre képezi le.

Ezek után könnyű olyan függvényt megadni, amely pontosan egy adott helyen nem folytonos:

$$F(x) = 2, ha$$

x=$0, 1egybknt. \quad (2.bra)$

Olyan függvény, amelyik sehol nem folytonos:

$$D(x) = 1, ha$$

x$racionlis, 0, ha$x$irracionlis.Afentipldanmimdostsval: E(x) = x, ha$x$racionlis, -x, ha$x$irracionlis\ (3.bra)olyanfggvnyhezjutun$

Riemann példája azt mutatja, hogy a folytonosság fogalma tágabb, mint szemléletünk sugallja: $R(x)$ ugyanis végtelen sok helyen folytonos és végtelen sok helyen nem az; pontosabban $R(x)$ éppen az irracionális helyeken folytonos. Ez azon múlik, hogy tetszőleges x_0 valós számhoz „közel” már csak nagy nevezőjű törtek vannak, és így az x_0-hoz „közeli” számok kicsi, a 0-hoz közeli számokra képeződnek le. Mintha a konstans nulla függvényt a racionális helyeken „elszakítottuk” volna, de igen óvatosan: ritka – bár végtelen sok – kivételtől eltekintve közel maradunk a 0 értékhez.

Igazolható ([5]), hogy olyan függvény viszont nem létezik, amely éppen a racionális helyeken folytonos.

A függvény az integrál fogalmához is érdekes példa. A klasszikus fizika integrálfogalma, mint a görbe által határolt terület, általánosítható. Ennek első lépése az integrálható függvények körébe vonja az R függvényt is, az integrál értékére pedig

$$\int_0^1 R(x)\,dx = 0$$

adódik, azaz dacára a sűrűn előforduló pozitív értékeknek, az integrál értéke 0. Kérdéses persze – és nem a matematika illetékességi köre –, hogy tulajdonítható-e fizikai jelentés az így kapott 0 értéknek, illetve van-e olyan fizikai folyamat, amelyet a Riemann-függvény ír le.

Az alábbiakban a Riemann függvénynek egy, az olvasó számára talán kevésbé ismert tulajdonságát mutatjuk be.

Könnyen látható, hogy a függvény korlátos, páros és periodikus. A továbbiakban a $[0,\ 1]$ periódusra szorítkozunk, sőt – mivel irracionális helyeken a függvényérték 0 – a $[0,\ 1]$ intervallumba eső racionális számokra szűkítjük az értelmezési tartományt. Az így nyert függvény gráfjának ponthalmazára (gráfpontok) röviden mint R-pontokra fogunk hivatkozni. Az R-pontokat a későbbiekben gyakran azonosítjuk első koordinátájuk redukált alakjával, azaz a $\left(\frac{p}{q},\ \frac{1}{q}\right)$ pontokat $\frac{p}{q}$-val.

Az R-pontok halmazáról legalább hozzávetőleges képet szeretnénk kapni, hiszen a definíció szerint minden $[0,\ 1]$-beli racionális pontban külön-külön kell ábrázolni a függvényt.

Néhány pont megszerkesztése után könnyű észrevenni, hogy az R-pontokat bizonyos szempontok alapján osztályozva egyes pontok egy-egy egyenesre, ún. *tartóegyenesekre* illeszkednek, amelyek segítségével a szerkesztés könnyebbé és pontosabbá válik. Az azonos számlálójú, az azonos nevezőjű, illetve az azonos számláló–nevező különbségű pontok egy-egy tartóegyenesen helyezkednek el (*4. ábra*). Az egyenesekhez még néhány szerkesztési segédvonalat behúzva felfedezhetjük azt a szerkezetet, amelyet a továbbiakban vizsgálunk.

Olyan iteratív eljárást mutatunk, amely néhány R-pontból kiindulva újabb R-pontokat ad, amelyekre az eljárás újból alkalmazható. Sőt, az iterációval végül minden R-pontot megkapunk pontosan egyszer.

Bármely R-pont és első vetülete egy, az y tengellyel párhuzamos egyenest határoz meg, ebből következően ezek az egyenesek egymással is párhuzamosak. Ezek szerint bármely két R-pont (az első vetületeikkel) egy-egy trapézt feszít ki.

A legnagyobb ilyen trapéz az egységnégyzet, amely tartalmazza az összes R-pontot. Érdekes módon, ennek átlói újabb R-pontban metszik egymást. Az átlók metszéspontja a közvetlen ősökkel két újabb trapézt hoz létre. Látható, hogy a kapott trapézok átlómetszéspontjai is R-pontok ($\frac{1}{3}$ és $\frac{2}{3}$). Sőt, folytatva, akárhány lépést hajtunk végre, minden esetben azt tapasztaljuk, hogy az átlómetszéspontok egyúttal R-pontok is (*5. ábra*).

Igaz-e, hogy minden előálló trapéz átlómetszéspontja R-pont? Megfordítva: Igaz-e, hogy az iteráció során minden R-pontot megkapunk? Azt szeretnénk tehát, hogy az egységnégyzetből származtatott trapézok, illetve ezek átlómetszéspontjai és az R-pontok között lényegében (azaz a $(0,\ 1)$ és az $(1,\ 1)$ pontoktól eltekintve) kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés legyen.

A Riemann-függvény és az imént vázolt geometriai algoritmus kapcsolatának felderítéséhez a függvény definíciójában is érintett számelméleti–algebrai ismereteinket hívjuk segítségül. A függvény hozzárendelési szabálya a racionális számok redukált alakját használja. Még néhány észrevétel és egy teljes indukciós bizonyítással egyszerűen tisztázható a legtöbb nyitva maradt kérdés. A kiinduló egységnégyzetet a $\frac{0}{1}$ és az $\frac{1}{1}$ R-pontok feszítik ki, amelynek átlómetszéspontja az $\frac{1}{2}$. Geometriai eljárásunkkal a $\left(\frac{0}{1},\ \frac{1}{1}\right)$ párból az $\frac{1}{2}$-t nyertük. Írjuk le algebrai művelettel a szerkesztést. Erre bevezetjük a $\otimes$ jelet, így a $\frac{0}{1} \otimes \frac{1}{1} = \frac{1}{2}$ algebrai alakot öltötte a fenti szerkesztési lépés.

A fentiek alapján a $[0,\ 1]$ racionális számaira általánosan is definiálhatjuk a *közteseképzésnek* vagy *mediánsképzésnek* nevezett műveletet. A geometriai szemléltetésből látszik, hogy a művelet eredménye az „összeadandók” (operandusok) közé ékelődik.

Definíció. Két racionális szám köztesét redukált alakjukból nyerjük (a fentiekhez hasonló módon). Legyen adva két redukált alakú racionális szám az $r = \frac{a}{b}$ és az $s = \frac{c}{d}$, ahol $(a,\ b) = 1$, illetve $(c,\ d) = 1$ és $b,\ d > 0$. Ekkor legyen $r \otimes s = \frac{a}{b} \otimes \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$.

Meg kell fogalmaznunk még egy fontos észrevételt: a trapézokat kifeszítő R-pontpárokat fel lehet ismerni csupán algebrai alakjukból. A kiinduló néhány lépésben szereplő párokat vizsgálva észrevehetjük, hogy a fenti jelölésekkel élve, ha $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, akkor $cb - ad = 1$.

1. Tétel. Ha az $\frac{a}{b}$ és $\frac{c}{d}$ racionális számokra teljesül, hogy $cb - ad = 1$, akkor a racionális számok redukált alakúak. Köztesüket vizsgálva az $\frac{a}{b}$ és $\frac{a}{b} \otimes \frac{c}{d}$, illetve az $\frac{a}{b} \otimes \frac{c}{d}$ és $\frac{c}{d}$ párokra hasonlóan igaz, hogy a megfelelő keresztszorzatok különbsége 1, azaz

$$(a+c)b - a(b+d) = 1 \qquad \text{és} \qquad c(b+d) - (a+c)d = 1.$$

Bizonyítás. A kiinduló racionális számok egyszerűsített alakban kell szerepeljenek, hiszen ellenkező esetben az 1-nél nagyobb közös osztó a $cb - ad$ kifejezésnek is osztója. De $cb - ad = 1$, aminek 1-nél nagyobb osztója nem lehet.

Az állítás második fele a zárójelek felbontása és rendezés után nyomban adódik.

$$(a+c)b - a(b+d) = ab + cb - ab - ad = cb - ad = 1,$$
$$c(b+d) - (a+c)d = cb + cd - ad - cd = cb - ad = 1. \blacksquare$$

2. Tétel. Ha az $\frac{a}{b}$ és $\frac{c}{d}$ racionális számokra teljesül, hogy $cb - ad = 1$, akkor $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, köztesük pedig közéjük ékelődik, azaz $\frac{a}{b} < \frac{a}{b} \otimes \frac{c}{d} < \frac{c}{d}$.

Bizonyítás. $\frac{c}{d} - \frac{a}{b} = \frac{cb - ad}{db} = \frac{1}{db}$.

$\frac{1}{db}$ pozitív, így az állítás első felét beláttuk. Ezután az $\frac{a}{b} < \frac{a}{b} \otimes \frac{c}{d} < \frac{c}{d}$ egyenlőtlenséglánc az 1. tételből nyomban adódik.

Az 1. tételből az is következik, hogy a fenti jelölésekkel az $\frac{a}{b} \otimes \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$ köztes is redukált alakú racionális szám. Ennek megfelelően $R\left(\frac{a}{b} \otimes \frac{c}{d}\right) = R\left(\frac{a+c}{b+d}\right) = \frac{1}{b+d}$. Vajon az egységnégyzetből kiinduló eljárás előállítja-e ugyanezt, vagyis a megfelelő $\left(\frac{a}{b},\ \frac{1}{b}\right)$ és $\left(\frac{c}{d},\ \frac{1}{d}\right)$ gráfpontok által kifeszített trapéz átlómetszéspontja valóban az $\left(\frac{a}{b} \otimes \frac{c}{d},\ \frac{1}{b+d}\right)$ pont lesz-e?

3. Tétel. A köztesképzés művelete megfelel az átlómetszéspont megszerkesztésének, azaz a következő eljárások ekvivalensek:

a) A $\left(\frac{0}{1},\ 1\right)$, $\left(\frac{1}{1},\ 1\right)$ számpárokból kiindulva, majd minden lépésben az $\left(\frac{a}{b},\ \frac{1}{b}\right)$, illetve $\left(\frac{c}{d},\ \frac{1}{d}\right)$ párokhoz az $\left(\frac{a+c}{b+d},\ \frac{1}{b+d}\right)$-t rendeljük, ahol a párok első elemeire $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, és közéjük eső racionális érték az iteráció során még nem fordult elő.

b) Az R-pontokat tartalmazó egységnégyzetből kiindulva minden lépésben megszerkesztjük az újonnan kapott trapézok átlómetszéspontjait. Minden pont első vetítőszakasza a trapéz alapjaival (az y tengellyel párhuzamos oldalak) két újabb trapézt feszít ki, amelyekre az eljárás újból alkalmazható.

Bizonyítás. A tételt teljes indukcióval bizonyítjuk.

A kiinduló feltételeket az elvárásoknak megfelelően párhuzamba lehet állítani. Az előző tételek figyelembe vételével már csak azt kell igazolnunk, hogy a közös indulás után ugyanúgy haladunk tovább.

Tegyük fel, hogy az ekvivalencia – a kezdeti $\left(\frac{0}{1},\ 1\right)$, illetve $\left(\frac{1}{1},\ 1\right)$ párok és a kiinduló egységnégyzet megfeleltetése után az első $(n-1)$ lépésen keresztül az $\left(\frac{a}{b},\ \frac{1}{b}\right)$, illetve a $\left(\frac{c}{d},\ \frac{1}{d}\right)$ számpárok és az $A\left(\frac{a}{b},\ R\left(\frac{a}{b}\right)\right)$, illetve $B\left(\frac{c}{d},\ R\left(\frac{c}{d}\right)\right)$ R-pontok által kifeszített trapézok között megadható. Világos, hogy ekkor az egymásnak megfelelő két objektum:

a) a köztesképzés segítségével kapott $\left(\frac{a}{b}\otimes\frac{c}{d},\ \frac{1}{b+d}\right)$ számpár, amelynek felhasználásával az $\left(\frac{a}{b},\ \frac{1}{b}\right)$, $\left(\frac{a}{b}\otimes\frac{c}{d},\ \frac{1}{b+d}\right)$ és az $\left(\frac{a}{b}\otimes\frac{c}{d},\ \frac{1}{b+d}\right)$, $\left(\frac{c}{d},\ \frac{1}{d}\right)$ számpárokhoz jutunk.

b) másrészt, a szóban forgó trapéz átlómetszéspontja (amelyet a négy csúcs vagy a trapéz alapjai egyértelműen meghatároznak), amelynek felhasználásával a folytatáshoz szükséges új trapézokat nyerünk.

Belátjuk, hogy ha $(n-1)$ lépésen keresztül egyértelmű a megfeleltetés az a) és a b) eljárás lépései között, akkor az az n-edik lépésben ugyanilyen módon folytatható. Elég belátni, hogy a fentiekben tárgyalt feltételek mellett a trapéz átlómetszéspontja a $C\left(\frac{a+c}{b+d},\ \frac{1}{b+d}\right)$ pont lesz. Ezt a *6. ábra* jelöléseit használva koordinátageometriai eszközökkel igazolhatjuk a leggyorsabban.

Az A_0B egyenes meredeksége $\frac{1}{d}:\left(\frac{c}{d}-\frac{a}{b}\right)=\frac{1}{d}:\frac{1}{bd}=b$, a B_0A egyenesé pedig $\frac{1}{b}:\left(\frac{a}{b}-\frac{c}{d}\right)=\frac{1}{b}:\frac{-1}{bd}=-d$. Az egyenesek egyenlete így

$$A_0B:\ y=bx-a;\qquad B_0A:\ y=-dx+c.$$

A két egyenes C metszéspontjára

$$x=\frac{a+c}{b+d}\qquad \text{és}\qquad y=\frac{1}{b+d},$$

azaz valóban megkapjuk az $\frac{a}{b}\otimes\frac{c}{d}$ R-pontot.

Végül meg kell mutatnunk, hogy eljárásunk során minden R-pontot megkapunk. Ezt a nevezőkre vonatkozó teljes indukcióval igazoljuk.

Ha $q=1$, akkor két R-pont van, $\frac{0}{1}$ és $\frac{1}{1}$, ezekkel kezdődik az eljárás. Legyen most $q>1$, és tegyük föl, hogy valamennyi q-nál kisebb nevezőjű R-pontot megkapunk. Megmutatjuk, hogy ha $0<p<q$ és $(p,\ q)=1$, akkor a $\frac{p}{q}$ R-pontot is megkapjuk.

Mivel $(p,\ q)=1$, azért a $px\equiv 1 \pmod q$ kongruenciának létezik olyan b megoldása, amelyre $0<b<q$. Ekkor $d=q-b$ választással $pd\equiv -1 \pmod q$. Ha most $\frac{pb-1}{q}=a$ és $\frac{pd+1}{q}=c$, akkor nyilván

$$a+c=\frac{p(b+d)}{q}=p\qquad \text{és}\qquad b+d=q,$$

továbbá $pb-aq=qc-pd=1$ miatt $(a,\ b)=(c,\ d)=1$, végül

$$\frac{a}{b}<\frac{p}{q}=\frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d}.$$

Megtaláltuk tehát a $\frac{p}{q}$-t szolgáltató két törtet, ezek $\frac{a}{b}$ és $\frac{c}{d}$. Mindkét nevező kisebb, mint q, így az indukciós feltevést alkalmazva a bizonyítás teljes.

A cikket néhány feladattal zárjuk:

1. Bizonyítsuk be, hogy a Riemann-függvény periodikus!

2. A Riemann-függvény $[0,\ 1]$ periódusában hány olyan x érték van, amelyre $R(x)=\frac{1}{n}$ (adott n természetes szám esetén)?

3. Hány olyan egyenes van a síkban, amelyre a Riemann-függvénynek végtelen sok gráfpontja esik?

4. Mit lehet mondani $R(x)$ differenciálhatóságáról?

5. A köztesképzésnek milyen műveleti tulajdonságai vannak? (Pl. kommutativitás, asszociativitás, disztributivitás valamilyen másik műveletre nézve, idempotencia.)

6. Az iteratív eljárás során n lépés után mekkora az előforduló legnagyobb nevező?

Irodalomjegyzék

[1]KöMaL 1893–1993 matematika CD-ROM

[2]*Niven–Zuckermann:* Bevezetés a számelméletbe (Műszaki Könyvkiadó, 1978)

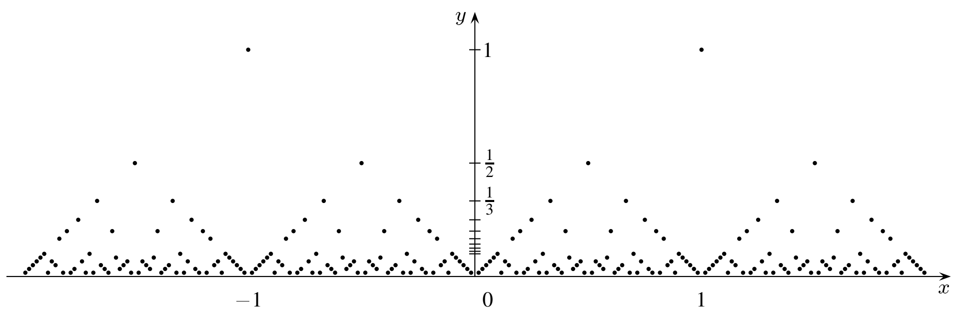
[3]*Reiman István:* A geometria és határterületei (Gondolat, 1986)

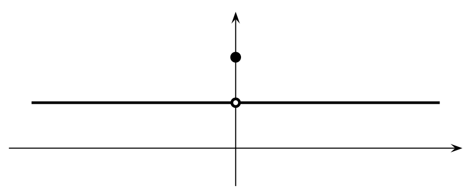
[4]*Sain Márton:* Nincs királyi út (Gondolat, 1986)

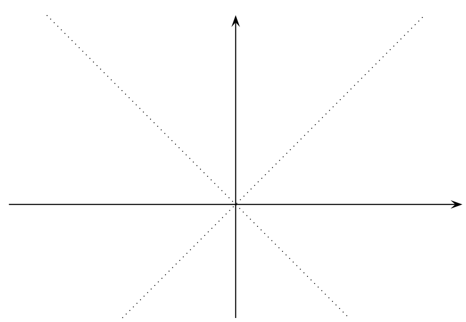
[5]*Sain Márton:* Matematikatörténeti ABC (Tankönyvkiadó, 1980)

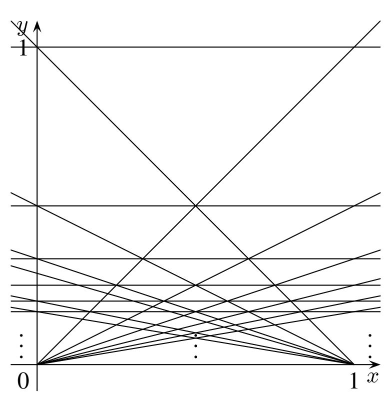
[6]*Erdős–Surányi:* Válogatott fejezetek a számelméletből (Polygon, 1996)

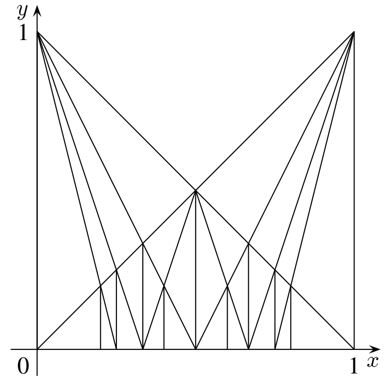
Holló-Szabó Ferenc



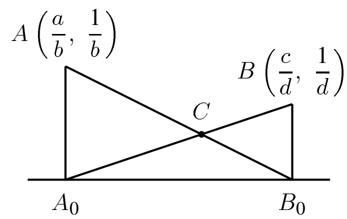








y
1
0
1
x



$A\left(\frac{a}{b},\ \frac{1}{b}\right)$
$B\left(\frac{c}{d},\ \frac{1}{d}\right)$
C
A_0
B_0