1. Mindkét egyenletet rendezzük nullára, majd alakítsunk szorzattá.

$$(x-y)(x^2+xy+y^2-21)=0,(x+y)(x^2-xy+y^2-13)=0.$$

Ez az egyenletrendszer ekvivalens a következő *négy* egyenletrendszerrel:

(I) $x-y=0, x+y=0$;(II) $x-y=0, x^2-xy+y^2=13$;(III) $x^2+xy+y^2=21, x+y=0$;(IV) $x^2+xy+y^2=21, x^2-xy+y^2 =$

Ezek megoldásai egyben az adott egyenletrendszer megoldásai is.

(I): $x_1=0$, $y_1=0$;
(II): $x_2=\sqrt{13}$, $y_2=\sqrt{13}$; $x_3=-\sqrt{13}$, $y_3=-\sqrt{13}$;
(III): $x_4=\sqrt{21}$, $y_4=-\sqrt{21}$; $x_5=-\sqrt{21}$, $y_5=\sqrt{21}$;
(IV): $x_6=1$, $y_6=4$; $x_7=4$, $y_7=1$; $x_8=-1$, $y_8=-4$; $x_9=-4$, $y_9=-1$.

2. *a*) Mivel

$$\sin(\alpha+\beta)=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2},\quad \text{továbbá}\quad \sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

és

$$\cos\frac{\alpha+\beta}{2}-\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=(-2)\sin\alpha\cdot\sin\beta,$$

azért a feltételellel ekvivalens a következő egyenlet:

$$\left(\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}=0.$$

A megoldások: $\alpha+\beta=2k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$; $\alpha=2n\pi$, $\beta\in\mathbf{R}$, $n\in\mathbf{Z}$ vagy $\alpha\in\mathbf{R}$, $\beta=2m\pi$, $m\in\mathbf{Z}$.

b) A megoldások: $x=-\dfrac{\pi}{6}+2k\pi$ vagy $x=2k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$.

3. Az igazolást vektorok alkalmazásával végezzük. Felhasználjuk, hogy egy vektornak önmagával való skaláris szorzata megegyezik a vektor hosszának négyzetével, azaz $\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}=\mathbf{x}^2=|\mathbf{x}|^2$.

Legyen az $ABCD$ négyszög D csúcsa az origó, $\overrightarrow{DA}=\mathbf{a}$, $\overrightarrow{DB}=\mathbf{b}$, $\overrightarrow{DC}=\mathbf{c}$. Ekkor $\overrightarrow{AC}=\mathbf{c}-\mathbf{a}$, $\overrightarrow{CB}=\mathbf{b}-\mathbf{c}$, $\overrightarrow{BA}=\mathbf{a}-\mathbf{b}$.

Ezzel a jelöléssel az $ABCD$ négyszög pontosan akkor paralelogramma, ha $\mathbf{b}=\mathbf{a}+\mathbf{c}$.

Ha az $ABCD$ négyszög paralelogramma, akkor $\mathbf{b}=\mathbf{a}+\mathbf{c}$. Az oldalak négyzetének összege ekkor valóban megegyezik az átlók négyzetének összegével, hiszen

$$DA^2+AB^2+BC^2+CD^2=2\mathbf{a}^2+2\mathbf{c}^2,$$

az átlók négyzetének összegének összege pedig

$$DB^2+CA^2=\mathbf{b}^2+(\mathbf{a}-\mathbf{c})^2=(\mathbf{a}+\mathbf{c})^2+(\mathbf{a}-\mathbf{c})^2=2\mathbf{a}^2+2\mathbf{c}^2.$$

Ha az oldalak négyzetének összege megegyezik az átlók négyzetének összegével, akkor

$$\mathbf{a}^2+(\mathbf{b}-\mathbf{a})^2+(\mathbf{c}-\mathbf{b})^2+\mathbf{c}^2=\mathbf{b}^2+(\mathbf{a}-\mathbf{c})^2,$$

ahonnan

$$\mathbf{a}^2+\mathbf{b}^2+\mathbf{c}^2-2\mathbf{ab}-2\mathbf{bc}+2\mathbf{ac}=\mathbf{0},$$
$$(\mathbf{a}+\mathbf{c}-\mathbf{b})^2=\mathbf{0},$$

ami csak úgy lehetséges, ha $\mathbf{a}+\mathbf{c}-\mathbf{b}=\mathbf{0}$, azaz $\mathbf{b}=\mathbf{a}+\mathbf{c}$, tehát a négyszög valóban paralelogramma.

4. Felhasználjuk, hogy ha $A>0$, $B>0$, akkor $A+B\geq 2\sqrt{AB}$, és az egyenlőség pontosan $A=B$ esetén teljesül. Azonos átalakításokkal

$$\frac{x^2+4}{x+4}=\frac{x^2-16+20}{x+4}=x-4+\frac{20}{x+4}=-8+\left(x+4+\frac{20}{x+4}\right)\geq -8+2\sqrt{20}=4\sqrt{5}-8,$$

hiszen $x+4>0$.

A függvény legkisebb értéke $4\sqrt{5}-8$, amit akkor vesz fel, ha $x+4=\dfrac{20}{x+4}$ (és $x+4>0$), azaz ha $x=2\sqrt{5}-4$.

Rábai Imre