1. Ha a kamatláb az első évben $p\%$ volt, akkor

$$300\,000\left(1+\frac{p}{100}\right)\left(1+\frac{p-3}{100}\right)=386\,400, 30(100+p)(100+p-3)=30\cdot 12\,880, p^2-197p-3180=0,$$

$p_1 = 15$ ($p_2 = -212$). A kamatláb az első évben 15%-os volt.

2. Vegyük fel egy egyenesen az A és P pontokat ($AP = 9$ egység) és az egyenestől $4,5$ egység távolságra haladó (egyik) párhuzamos egyenest, majd ezen az egyenesen a megfelelő D pontot ($AD \perp AP$).

A B pont a P ponttól 6 egység távolságra van az AP egyenesen. Két ilyen B pont van, B_1 és B_2, $AB_2 = 9 + 6 = 15$ egység, $AB_2 = 9 - 6 = 3$ egység. Így két C és két Q pont van, C_1 és C_2, valamint Q_1 és Q_2.

Az APQ_1 és a DC_1P, illetve az APQ_2 és a DC_2P háromszögek hasonlók. Ha a Q_1, illetve a Q_2 pont távolsága az AB_1, illetve AB_2 egyenestől d_1, illetve d_2, akkor

$$d_1 = 9\cdot\frac{4,5}{15} = 2,7 \text{ egység}, \quad \text{illetve} \quad d_2 = 9\cdot\frac{4,5}{3} = 13,5 \text{ egység}.$$

3. A feltételekből adódik, hogy α és β hegyesszögek. A szinusztétel alkalmazásával

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{\cos\beta}{\sin\beta}=\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\beta},$$

ahonnan $\sin 2\alpha = \sin 2\beta$, azaz $2\alpha = 2\beta + 2k\pi$ vagy $2\alpha + 2\beta = \pi + 2k\pi$, tehát $\alpha = \beta$ vagy $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$. Az első esetben $b = a$, a másodikban $b = \sqrt{c^2 - a^2}$.

4. A lefedetlen terület akkor a legnagyobb, ha a lefedett terület a legkisebb. Az AP és BP szakaszok hosszának az összege $2a$; az egyik legyen $a - x$, a másik $a + x$, ahol $0 \le x < a$.

A lefedett terület: $T(x) = (a - x)^2 + (a + x)^2 = 2x^2 + 2a^2$, ahol $0 \le x < a$.

T akkor a legkisebb, ha $x = 0$, P az AB szakasz felezőpontja. A lefedetlen terület legnagyobb értéke innen $4a^2 - 2a^2 = 2a^2$ területegység.

5. Mivel $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ és $\sin^2 x = |\sin x|^2$, azért $4\cdot|\sin x|^2 + 8|\sin x| - 5 \ge 0$, azaz

$$4\left(|\sin x|-\frac{1}{2}\right)\left(|\sin x|+\frac{5}{2}\right)\ge 0.$$

$|\sin x| + \frac{5}{2} > 0$ minden valós x-re, tehát a feltétel $|\sin x| \ge \frac{1}{2}$, azaz $\sin x \ge \frac{1}{2}$ vagy $\sin x \le -\frac{1}{2}$. Az egyenlőtlenség a

$$\frac{\pi}{6}+k\pi \le x \le \frac{5\pi}{6}+k\pi, \qquad k\in\mathbf{Z}$$

valós számokra teljesül.

6. Az adott egyenessel párhuzamos egyenesek egyenlete $3x + 4y + k = 0$ ($k \in \mathbf{R}$). Ezek közül keressük azokat, amelyekre

$$2=\frac{|3\cdot(-1)+4\cdot 2+k|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{|k+5|}{\sqrt{25}}.$$

Innen $10 = |k + 5|$, azaz $k + 5 = 10$ vagy $k + 5 = -10$, $k = 5$ vagy $k = -15$. A feltételeknek a $3x + 4y + 5 = 0$ és a $3x + 4y - 15 = 0$ egyenletű egyenesek felelnek meg.

(Azokat az egyeneseket keressük, amelyek érintik az $(x+1)^2-(y-2)^2 = 4$ egyenletű kört is. Így a k értékét diszkrimináns feltétellel is megkaphatjuk. A feladat a szerkesztés menetének számítással való követése révén is megoldható.)

7. Ismeretes, hogy ha $A > 0$ és $B > 0$, akkor $A + B \ge 2\sqrt{AB}$, és az egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $A = B$. Ennek és az $x \mapsto \log_2 x$ függvény szigorú monoton növekedésének alkalmazásával

$$\log_2\left(\cos^2(xy)+\frac{1}{4\cos^2(xy)}\right)\ge\log_2\left(2\cdot\sqrt{\frac{1}{4}}\right)=\log_2 1=0.$$

Mivel $-\left(y-\frac{1}{2}\right)^2 \le 0$, azért azok az $(x; y)$ számpárok a megoldások, amelyekre

$$\cos^2(xy)=\frac{1}{4\cos^2(xy)} \qquad \text{és} \qquad y=\frac{1}{2}.$$

Innen $\cos^4\frac{x}{2}=\frac{1}{4}$, $\cos^2\frac{x}{2}=\frac{1}{2}$, $\frac{1+\cos x}{2}=\frac{1}{2}$, $\cos x = 0$.

A megoldások: $x_k=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$, $y_k=\dfrac{1}{2}$, $k\in\mathbf{Z}$.

8. Mivel $3^x>0$ minden valós x-re, azért – azonos átalakításokkal és rendezéssel –

$$(a-9)\cdot(3^x)^2-2a\cdot 3^x+a=0.$$

Ha $a=9$, akkor $3^x=\dfrac{1}{2}$, $x_0=\log_3\dfrac{1}{2}$.

Ha $a\neq 9$, akkor a (3^x)-re másodfokú egyenlet diszkriminánsa:

$$D=4a^2-4a(a-9)=36a.$$

Így, ha $a<0$, akkor nincs megoldás, ha $a\geq 0$, akkor *lehet* megoldás.

Ha $a\geq 0$, akkor $a=\left(\sqrt{a}\right)^2$, így $3^x=\dfrac{2a\pm 6\sqrt{a}}{2(a-9)}$. Azonos átalakításokkal

$$\frac{2a\pm 6\sqrt{a}}{2(a-9)}=\frac{2\sqrt{a}(\sqrt{a}\pm 3)}{2(\sqrt{a}-3)(\sqrt{a}+3)},$$

$$\text{tehát}\qquad 3^x=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+3}\qquad\text{vagy}\qquad 3^x=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-3}.$$

Mivel $3^x>0$, azért $a=0$ esetén nincs megoldás;

az $x_1=\log_3\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+3}$ akkor megoldás, ha $a>0$ és $a\neq 9$,

az $x_2=\log_3\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-3}$ akkor megoldás, ha $a>9$.

Így, ha $a\leq 0$, akkor nincs megoldás; ha $0<a<9$ vagy $a=9$, akkor egy megoldás van, x_1, illetve x_0; ha $a>9$, akkor két megoldás van, x_1 és x_2.

Rábai Imre