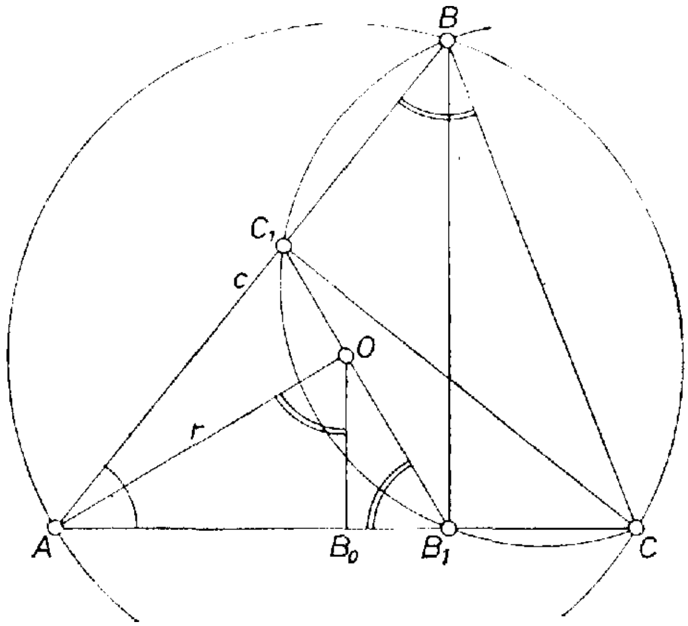
Az O középpont kívánt helyzete miatt a háromszög nem lehet sem tompaszögű, sem derékszögű. Továbbá a $BAC\sphericalangle = \alpha$ csak kisebb lehet β és γ mindegyikénél, különben pl. az AB oldal felező merőlegesének nincs pontja a B_1C_1 szakaszon, tehát O sem lehet rajta. Ezek szerint $\alpha < \beta \le \gamma$.



B_1 és C_1 a BC átmérőjű Thalész-körön vannak, ezért $OB_1A\sphericalangle = C_1B_1A\sphericalangle = C_1BC\sphericalangle = \beta$.
AC felezőpontját B_0-lal jelölve $AOB_0\sphericalangle = \beta$, és

$$\operatorname{tg} OB_1A\sphericalangle = \operatorname{tg}\beta = \frac{OB_0}{AB_1 - AB_0} = \frac{r\cos\beta}{c\cos\alpha - \dfrac{b}{2}} = \frac{r\cos\beta}{2r\sin\gamma\cos\alpha - r\sin\beta},$$

$$\frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{\cos\beta}{2\cos\alpha\sin\gamma - \sin\beta},$$

$$2\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma = \sin^2\beta + \cos^2\beta = 1,$$

ez egy szög-feltétel a vizsgált háromszög-osztályra. Átrendezve, trigonometriai azonosságok ismételt alkalmazásával

$$\frac{1}{\cos\alpha} = 2\sin\beta\sin\gamma = \cos(\gamma-\beta) - \cos(\beta+\gamma) = \cos(\gamma-\beta) + \cos\alpha,$$

$$\cos(\gamma-\beta) = \frac{1}{\cos\alpha} - \cos\alpha = \frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha} = \sin\alpha\operatorname{tg}\alpha. \tag{1}$$

Ennek alapján megválasztott α mellett kiszámítható β és γ, ennek diszkussziójából kapjuk a keresett korlátokat.

Mivel $\cos(\gamma-\beta) \le 1$, azért

$$\frac{1}{\cos\alpha} - \cos\alpha \le 1,$$

$$0 \le \cos^2\alpha + \cos\alpha - 1 = \left(\cos\alpha - \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\left(\cos\alpha + \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right),$$

és mivel a második tényező mindig pozitív, azért

$$\cos\alpha \ge \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \cos 51^\circ 49{,}6',$$

$$\alpha \le 51^\circ 49{,}6'.$$

Rögzített α mellett γ és β említett számítása:

$$\gamma + \beta = 108^\circ - \alpha,$$

$$\gamma - \beta = \arccos\left(\frac{1}{\cos\alpha} - \cos\alpha\right),\ \text{ezekből}$$

$$\gamma = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}\arccos\left(\frac{1}{\cos\alpha} - \cos\alpha\right), \tag{2}$$

$$\beta = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}\arccos\left(\frac{1}{\cos\alpha} - \cos\alpha\right),$$

egyenlőség a fenti $\alpha = 51°49{,}6'$ mellett áll be: $\gamma = \beta = 64°5{,}4'$.

Mármost a $\gamma < 90°$ korlátozás miatt (2)-ből

$$\arccos\left(\frac{1}{\cos\alpha} - \cos\alpha\right) < \alpha,$$

ebből a cosinusfüggvény szigorúan monoton csökkenése alapján

$$\frac{1}{\cos\alpha} - \cos\alpha > \cos\alpha,$$

egyrészt $\cos^2\alpha < \dfrac{1}{2}$, másrészt $\cos(\gamma - \beta) > \cos\alpha$.

$$\alpha > 45° \qquad\qquad \gamma - \beta < \alpha.$$

Ha α csökkenve tart $45°$-hoz, akkor $\gamma - \beta$ növekedve tart $45°$-hoz, $\alpha = 45°$ mellett $\beta = 45°$, $\gamma = 90°$, és O a C_1-ben adódik, már nem belső pontja a B_1C_1 szakasznak.

Mindezek szerint a korlátok

$$45° < \alpha \le 51°49{,}6' \quad \text{és}$$
$$45° < \beta \le 64°5{,}4' \le \gamma < 90°.$$

Ezek mellett tejesül is a követelmény, mert számításaink megfordíthatóak.