I. kategória: SzakközépiskolákElső (iskolai) forduló

1. Határozza meg a

$$2x^5+3x^4-2x^3-x^2+3x+1$$

polinom számértékét, ha $\dfrac{1}{x}=1-x^2$.

2. A természetes számok H részhalmazának elemei a következő tulajdonsággal rendelkeznek:
a) $6\in H$.
b) Ha $x\in H$, akkor $3x\in H$.
c) Ha $(8x-2862)\in H$, akkor $x\in H$.
Bizonyítsa be, hogy $1998\in H$!

3. Az $ABCD$ húrnégyszög AC átlója a húrnégyszöghöz tartozó kör átmérője. Bizonyítsa be, hogy a négyszög szemközti oldalainak a BD átlóra eső merőleges vetületei egyenlő hosszúak!

4. A p valós paraméter mely értékei mellett van valós megoldása a

$$\frac{\sin 3x\cdot\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-4x\right)+1}{\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-7x\right)-\cos\left(\dfrac{\pi}{6}+x\right)+p}=0$$

egyenletnek?

Számítsa ki az egyenlet gyökeit!

5. Bergengóciában a hivatalos fizetőeszköz a peták. A 10, 15 és 20 petákos érmék ezüstből, az 1, 2 és 3 petákos érmék rézből készültek. A pályaudvaron található automata pénzváltó a következőképpen tudja felváltani az ezüstérméket:

$$20=15+2+2+115=10+2+2+110=3+3+2+2$$

Pistának kizárólag ezüstérmékben 125 petákja volt, és valamennyi ezüstpénzét rézre váltotta fel. Jancsi, miután megszámolta, hogy Pistának mely rézérmékből hány darabja lett a váltás után, kijelentette: „Most egyértelműen meg tudom mondani, hogy milyen ezüstérméid voltak."

Milyen következtetéssel tudta Jancsi egyértelműen megállapítani, hogy Pistának a váltás előtt milyen ezüstérméi voltak? (Megjegyezzük, hogy Jancsi Pista ezüstérméiről csupán annyit tudott, hogy összes pénze a váltás előtt a 20, 15 és 10 petákosok közül került ki.)

6. A valós számok halmazán értelmezett $x\mapsto f(x)$ függvényről a következőket tudjuk:

$$f(x-2)+2f(-x)=x^2+1.$$

Határozza meg az $f(x)$ függvény szélsőértékének helyét és nagyságát!

Második forduló

1. Legyen A egy legalább kétjegyű (tízes számrendszerbeli) egész szám. Tekintsük azt a B számot, amely úgy keletkezik, hogy az A szám számjegyeit fordított sorrendben írjuk le. Bizonyítsa be, hogy ha A első és utolsó számjegyeinek különbsége páros szám, akkor $|A-B|$ osztható 18-cal!

2. Az ABC derékszögű háromszög AC és BC befogói fölé kifelé megrajzoljuk az $ACDE$ és a $BFGC$ négyzeteket. Az AF egyenes a BC oldalt K pontban, a BE egyenes az AC oldalt H pontban metszi. Jelöljük a BE és az AF egyenesek közös pontját M-mel. Bizonyítsa be, hogy a $KCHM$ négyszög területe az AMB háromszög területével egyenlő!

3. Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenletet!

$$\left[\log_{(\sqrt{x}-1)}(x-1)+\log_{(x-1)}(\sqrt{x}-1)^2+5\right]^2=$$
$$=4\left[\log_{(\sqrt{x}-1)}(x-1)+2\right]\left[\log_{(x-1)}(\sqrt{x}-1)^2+3\right].$$

4. Az ABC háromszögben az $ACB\sphericalangle=60^\circ$, a $CAB\sphericalangle$ szögfelezője a BC oldalt a D pontban, az $ABC\sphericalangle$ felezője az AC oldalt az E pontban metszi. Az AD és a BE szakaszok metszéspontja O. Bizonyítsa be, hogy

$$CD+CE=CO\sqrt{3}.$$

5. Az $ABCD$ téglalap oldalai: $AB = CD = 5a$, $BC = DA = 3a$ hosszúságúak ($a \in \mathbf{R}^+$). Az oldalakra ugyanazon körüljárási irányban felmérjük az

$$x = AA_1 = BB_1 = CC_1 = DD_1$$

szakaszokat úgy, hogy az $A_1B_1C_1D_1$ paralelogramma a téglalap belsejében legyen.

Határozza meg azon x értéket, amely mellett a beírt $A_1B_1C_1D_1$ paralelogramma hegyesszöge a legkisebb! Számítsa ki ezt a legkisebb szöget!

Harmadik (döntő) forduló

1. Határozza meg azokat a k és m egész számokat, amelyekre teljesül a következő egyenlet:

$$k^2 + m^2 + k + m + 4\sqrt{k^2 - 2km + m + 11} + 4\sqrt{m^2 - 2km + k + 19} = 4km - 30.$$

2. Az ABC szabályos háromszög AB oldalán jelöljünk ki egy P belső pontot. Ezután rajzoljunk az AP és a BP szakaszok fölé kifelé egy-egy szabályos APQ és BPR háromszöget. Az ABC háromszög súlypontját jelöljük S_1-gyel, az APQ háromszög súlypontját S_2-vel, a BPR háromszög súlypontját S_3-mal.

Hogyan választható meg a P pont, ha azt akarjuk, hogy az $S_1S_2S_3$ háromszög területe *a)* minimális, *b)* maximális legyen?

3. *a)* Igazolja, hogy a p valós paraméter bármely értékénél a

$$2x^2 - 10px + 7p - 1 = 0$$

egyenletnek két különböző valós gyöke van.

b) A p értékétől függően hány gyöke van az egyenletnek a $]-1;1[$ intervallumban?

II. kategória: Nem speciális tantervű gimnáziumokElső (iskolai) forduló

1. Mely természetes n szám esetén teljesül, hogy

$$\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \dots \cdot \log_n (n+1) = 10?$$

2. Az x_0, x_1, x_2, ... sorozatban $x_0 = a$, $x_1 = b$ adott pozitív számok, és a sorozat további tagjainak képzési szabálya:

$$x_{n+2} = \frac{x_{n+1} + 1}{x_n} \qquad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Fejezzük ki x_{1998} értékét a és b segítségével!

3. Határozzuk meg a derékszögű koordinátarendszer síkjában azoknak a pontoknak a halmazát, amelyekre igaz, hogy létezik olyan téglalap, amelynek a kerülete a pont első koordinátájával, területe pedig a pont második koordinátájával egyenlő!

4. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$x + 2y + 3z = 2\left(\sqrt{x-1} + \sqrt{2y-1} + \sqrt{3z-1}\right).$$

5. Az ABC derékszögű háromszög hozzáírt köreinek (külső érintő köreinek) a középpontjai A', B', C'. Bizonyítsuk be, hogy az $A'B'C'$ háromszög területe legalább $(\sqrt{8}+2)$-szerese az ABC háromszög területének!

Második forduló

1. Felírtunk a táblára n db valós számot ($n \geq 5$); ezek a következő tulajdonságokkal rendelkeznek:
a) a számok között nincs a 0, de ott van az 1999;
b) a felírt számok közül bármely négy (megfelelő sorrendben véve) egy mértani sorozat egymás utáni négy tagja.
Adjuk meg a felírt számokat!

2. Egy derékszögű háromszögbe kétféle módon is beírtunk egy négyzetet: az első esetben a négyzet két oldala egy-egy befogón van, egy csúcsa pedig az átfogón; a második esetben a négyzet oldala az átfogón van, egy-egy csúcsa pedig egy-egy befogón. Az első esetben a négyzet területe 441, a másodikban 440 területegység. Mekkora a befogók összege?

3. Egy szabályos négyoldalú gúla beírt gömbjének a középpontja, valamint élérintő gömbjének a középpontja egyenlő távol van a gúla alapsíkjától. Mekkora a gúla térfogata, ha alapélének a hossza 2? (Az élérintő gömb a gúla minden élét az él belső pontjában érinti, a beírt gömb pedig minden lapot belső pontban érint.)

4. Tekintsük azokat a pozitív egészekből álló $(x,\ y)$ párokat, amelyek kielégítik az

$$x^2 - y^2 = 10^2 \cdot 30^{2n}$$

egyenletet (n pozitív egész).
a) Határozzuk meg az egyenletet kielégítő $(x,\ y)$ párok számát n függvényeként.
b) Bizonyítsuk be, hogy ezeknek a pároknak a száma nem lehet négyzetszám.

Harmadik (döntő) forduló

1. Oldjuk meg az 1-nél nem nagyobb pozitív számok halmazán a következő egyenletet:

$$\frac{x}{1+y+zx} + \frac{y}{1+z+xy} + \frac{z}{1+x+yz} = \frac{3}{x+y+z}.$$

2. Legfeljebb mekkora lehet annak a tetraédernek a térfogata, amelynek az élfelező pontjai egy egységsugarú gömbön helyezkednek el?

3. Egy $n^2 \times n^2$-es sakktábla mezőire pozitív egész számokat írunk úgy, hogy két szomszédos mezőn lévő szám különbségének az abszolút értéke nem nagyobb n-nél. Bizonyítsuk be, hogy legalább $\left[\frac{n}{2}\right] + 1$ számú mezőn ugyanaz a szám áll. ($\left[\frac{n}{2}\right]$ az $\frac{n}{2}$ egészrészét jelöli; két mező szomszédos, ha van közös oldaluk.)

III. kategória: Speciális matematika tantervű gimnáziumok Első forduló

1. Valamikor a huszadik században a 99 évnél nem idősebb és különböző korú Alexander és Bernát mindketten éppen annyi idősek voltak, mint amennyi a születési évszámukban a számjegyek összege. Hány év közöttük a korkülönbség?

2. Az ABC háromszög AB oldalának egy belső pontja a D pont. Az ACD háromszögbe és a CDB háromszögbe írt körök egymást a CD szakaszon érintik. Bizonyítsuk be, hogy az ABC háromszögbe írt kör az AB oldalt a D pontban érinti.

3. Egy szabályos négyoldalú gúla köré írható gömb sugara R. A gúla oldallapjainak (összesen négy darab) síkját, valamint a gúla körülírt gömbjét belülről érintő gömb sugara ϱ. Mekkora szöget zár be a gúla két szomszédos oldallapja, ha $\frac{R}{\varrho} = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$?

4. Van-e olyan $P(x)$ egész együtthatós polinom, amelyre $P(10) = 400$, $P(14) = 440$ és $P(18) = 520$?

5. Az a, b, c pozitív számokra és az $n \geq 2$ egészre $a^n + b^n = c^n$. Mely k pozitív egészekre szerkeszthető az a^k, b^k, c^k oldalakkal tompaszögű háromszög?

Második (döntő) forduló

1. Legyen $n > 1$ tetszőleges, és jelöljük k-val az n-nél nem nagyobb (pozitív) prímek számát. Tekintsünk $k+1$ darab olyan pozitív egészt, amelyek közül egyik sem osztója az összes többi szorzatának. Bizonyítsuk be, hogy a $k+1$ pozitív egész között van olyan, amely nagyobb, mint n.

2. Az $x^4 - 2x^2 + ax + b$ polinomnak négy különböző gyöke van a valós számok körében. Bizonyítsuk be, hogy mindegyik gyök abszolút értéke kisebb, mint $\sqrt{3}$.

3. Tegyük fel, hogy egy konvex sokszög minden oldala egész szám és a kerülete páratlan szám. Bizonyítsuk be, hogy a sokszög területe legalább $\frac{\sqrt{3}}{4}$.