9. évfolyam

1. Milyen p és q prímszámokra teljesül a

$$3(p^2 - q) = q^2 - p$$

egyenlet? *Oláh György* (Komárom)

2. Az ABC háromszögben $AC = BC$ és $ABC\sphericalangle = BAC\sphericalangle = 40°$. A BAC szög szögfelezője a BC oldalt a D pontban metszi. Bizonyítsuk be, hogy $AD + DC = AB$.

Szabó Magda (Szabadka)

3. Az $ABCD$ érintőnégyszög (A és C átellenes csúcsok) beírt körének középpontja O, sugara r. Az ABO és a CDO háromszögek köré írt körének sugara r_1, illetve r_2. Bizonyítsuk be, hogy r nem lehet nagyobb r_1-nél is és r_2-nél is. *Kántor Sándor* (Debrecen)

4. A valós számok halmazában értelmezett $\circ$ műveletre (amelynél bármely x, $y \in \mathbf{R}$ esetén $x \circ y \in \mathbf{R}$) minden x, y, z valós szám esetén teljesülnek a következő tulajdonságok:

$$x \circ y = y \circ x, (x \circ y)z = (xz) \circ (yz), (x \circ y) + z = (x + z) \circ (y + z).$$

Mennyi $1999 \circ 2000$? *Kántor Sándorné* (Debrecen)

5. Egy téglalap oldalai 37 és 54 egységnyiek. Vegyünk fel a téglalapon (a belsejében vagy a kerületén) 1999 pontot. Bizonyítsuk be, hogy a pontok bármilyen választása esetén lesz közöttük legalább három, amely lefedhető egy $\frac{9}{4}$ átmérőjű körlappal. *Benedek Ilona* (Vác)

6. Adottak az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ valós számok úgy, hogy $1 \le x_i \le n^2$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) és $1 \le i < j \le n$ esetén $x_j - x_i \ge j + i$. Határozzuk meg az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ számokat.

Bencze Mihály (Brassó)

10. évfolyam

1. Bizonyítsuk be, hogy

$$1997^{1999} + 1999^{1997}$$

osztható 3996-tal. *Benedek Ilona* (Vác)

2. Az $ABCD$ trapéz csúcsai egy körre illeszkednek. A trapéz AD és BC szárainak meghosszabbításai az M pontban metszik egymást. A körhöz a B, illetve D pontokban húzott érintők metszéspontja N. Bizonyítsuk be, hogy $MN \parallel AB$. *Neubauer Ferenc* (Munkács)

3. Határozzuk meg az m valós paraméternek azokat az értékeit, amelyekre a

$$9mx(3x - 1)(3x - 2)(x - 1) = 1$$

egyenletnek négy (nem feltétlenül különböző) valós gyöke van. *Péter András* (Arad)

4. Adott az ABC egyenlő oldalú háromszög belsejében a P pont úgy, hogy $PA = 6$, $PB = 8$, $PC = 12$. Határozzuk meg az ABC háromszög területét. *Kántor Sándorné* (Debrecen)

5. Legyenek $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ valós számok. Határozzuk meg az

$$x, \qquad y + \frac{1}{z}, \qquad z + \frac{1}{x} \quad \text{és} \quad \frac{1}{y}$$

számok legkisebbikének lehető legnagyobb értékét. *András Szilárd* (Kolozsvár)

6. Hány részre osztják fel a síkot egy 1999 oldalú szabályos sokszög oldalegyenesei?

Oláh György (Komárom)

11. évfolyam

1. Melyik az a háromjegyű szám, amelynek négyzete is és köbe is ugyanezzel a háromjegyű számmal végződik? *Bogdán Zoltán* (Cegléd)

2. Tekintsük az összes olyan $P(x; y)$ pontot, amelynek koordinátáira

$$x^2y^2 + x^2 - 10xy - 8x + 16 = 0$$

teljesül. Milyen értékeket vehet fel az xy szorzat? *Kántor Sándorné* (Debrecen)

3. Határozzuk meg az összes olyan valós együtthatós $p(x)$ polinomot, amelyre minden valós x esetén teljesül az

$$x \cdot p(x) \cdot p(1 - x) + x^3 + 100 \ge 0$$

egyenlőtlenség. *Erdős Gábor* (Nagykanizsa)

4. Legyen S az ABC hegyesszögű háromszög súlypontja és r a háromszög köré írt kör sugara. Bizonyítsuk be, hogy

$$AS^2+BS^2+CS^2>\frac{8r^2}{3}.$$

Oláh György (Komárom)

5. Bizonyítsuk be, hogy ha egy tetraéder súlypontja mind a négy csúcstól egyenlő távolságra van, akkor bármely két szemközti élpár felezőpontjait összekötő szakasz merőleges mindkét élre.

Kiss Sándor (Nyíregyháza)

6. Igazoljuk, hogy ha x_1, x_2, $\ldots$, x_n $(n\geq 3)$ különböző pozitív egész számok, akkor

$$\frac{1}{x_1^3}+\cdots+\frac{1}{x_n^3}<\frac{11}{8}-\frac{1}{2n(n-1)}.$$

Bencze Mihály (Brassó)

12. évfolyam

1. Az ABC háromszög belsejében lévő P pontra igaz, hogy $PAB\sphericalangle=PBC\sphericalangle=PCA\sphericalangle$. Mivel egyenlő a PAB szög tangensének értéke, ha $AB=13$, $BC=14$ és $AC=15$?

Kiss Sándor (Nyíregyháza)

2. Egy minden valós számra értelmezett f függvény minden x és y értékre kielégíti a következő egyenlőtlenségeket:

$$f(x)\leq x, f(x+y)\leq f(x)+f(y).$$

Bizonyítsuk be, hogy minden x valós számra $f(x)=x$. *Kántor Sándorné* (Debrecen)

3. Oldjuk meg a következő egyenletet, ha x és y egész számok:

$$x^3-23x^2-23y^2+y^2x+2x=1849.$$

Bíró Bálint (Eger)

4. Legyen A a tízes számrendszerben felírt 1997^{1999} szám számjegyeinek az összege, B pedig az A számjegyeinek az összege. Számítsuk ki B számjegyeinek összegét.

Boros Zoltán (Debrecen)

5. Bizonyítsuk be, hogy ha az ABC háromszög hegyesszögű, akkor létezik olyan P pont a térben, amelyből az ABC háromszög bármely csúcsát a szemközti oldalegyenes bármely pontjával összekötő szakasz derékszögben látszik. *Kántor Sándor* (Debrecen)

6. Legyenek $a>0$ és $b>0$ adott valós számok, valamint

$$f(x,\ y,\ z)=\max\left\{ax+\frac{b}{y},\ ay+\frac{b}{z},\ az+\frac{b}{x}\right\}\qquad(x>0,\ y>0,\ z>0).$$

Igazoljuk, hogy az f függvénynek van minimuma, és határozzuk meg ezt a minimumot.

Szász Róbert és Dáné Károly (Marosvásárhely)