A szeptemberi számban közölt beszámoló után most a feladatok megoldása következik lényegében úgy, ahogy azt a szerzők, a magyar csapat tagjai a versenyt követően leírták. Ezúton gratulálunk eredményükhöz, és egyúttal megköszönjük közreműködésüket e cikk elkészítésében.

A szerk.

1. *Határozzuk meg az összes olyan, legalább három pontot tartalmazó síkbeli véges S ponthalmazt, amire az alábbi feltétel teljesül:*

S bármely két különböző A, B pontjára az AB szakasz felezőmerőlegese szimmetriatengelye az S halmaznak.

Megoldás. Legyen S egy ilyen ponthalmaz. Ekkor legyen az S-ben lévő pontok súlypontja P, és e egy tetszőleges szimmetriatengely. Ha e-re tükrözzük az S ponthalmazt, akkor ugyanehhez a ponthalmazhoz jutunk, tehát ha a súlypontját tükrözzük e-re, akkor önmagába megy át. Ez azt jelenti, hogy P szükségképpen rajta van az e szimmetriatengelyen, azaz a szimmetriatengelyek mind egy ponton mennek át.

Az S halmaz tetszőleges két A, B pontja egyenlő távolságra van P-től, mert P a felező merőlegesükön van. Tehát S pontjai mind ugyanakkora távolságra vannak P-től, azaz egy P körüli körön vannak.

Tegyük fel, hogy A, B, C három S-beli egymás melletti pont a körön – azaz a B-t tartalmazó AC íven a B-n kívül nincs más S-beli pont –, amelyekre $APB\sphericalangle < BPC\sphericalangle$. Ekkor legyen az AC ív felezőpontja F. Feltevésünk miatt B az AF íven fog elhelyezkedni, tehát ha az AC szakasz felező merőlegesére tükrözzük (ez éppen a PF egyenes), a tükörkép az FC íven lesz, nevezzük B'-nek. Az AC szakasz felező merőlegese szimmetriatengelye S-nek, tehát B' szükségképpen benne van az S ponthalmazban. Ez viszont ellentmond azon feltevésünknek, hogy A, B, C három egymás melletti pont a körön, mivel B' az FC íven van. Tehát $APB\sphericalangle = BPC\sphericalangle$ tetszőleges egymás melletti pontokra, azaz a szomszédos pontokat összekötő ívek hossza egyenlő, az S pontjai egy szabályos sokszög csúcsai.

Megmutatjuk, hogy a szabályos n-szögek eleget is tesznek a feladat feltételeinek.

Két egymás melletti Q és R pontra $QPR\sphericalangle = \dfrac{2\pi}{n}$, és két tetszőleges csúcspont és a középpont által meghatározott szög ennek egész számszorosa.

Az A, B, C pontok legyenek S tetszőleges pontjai. Legyen

$$APB\sphericalangle = k\cdot\frac{360^\circ}{n},\quad APC\sphericalangle = \ell\cdot\frac{360^\circ}{n}.$$

Ekkor AB felezőmerőlegesére tükrözve C-t, C'-höz jutunk,

$$BPC'\sphericalangle = APC\sphericalangle = \ell\cdot\frac{360^\circ}{n}.$$

Tehát C' szintén pontja a szabályos n-szögnek, mert a $BPC'\sphericalangle$ $\dfrac{360^\circ}{n}$ többszöröse, és B pontja a szabályos n-szögnek. Tehát az AB szakasz felezőmerőlegesére szimmetrikus lesz a szabályos n-szög.

Tehát ezek az S ponthalmazok éppen a szabályos n-szögek csúcspontjai, ahol $n \geq 3$.

Devecsery András megoldása

2. *Legyen n egy adott egész szám, amire $n \geq 2$.*

(a) *Határozzuk meg a legkisebb olyan C konstanst, amire a*

$$\sum_{1\leq i<j\leq n} x_i x_j(x_i^2+x_j^2) \leq C\Big(\sum_{1\leq i\leq n} x_i\Big)^4$$

egyenlőtlenség minden $x_1, \ldots, x_n \geq 0$ valós szám esetén teljesül.

(b) *Határozzuk meg, hogy ezen C konstans mellett mikor áll fenn egyenlőség.*

Megoldás. Ha $x_i = 0$ minden i-re, akkor az egyenlőtlenség $0 \leq C\cdot 0$, ami minden C mellett teljesül, sőt egyenlőség áll fenn. C meghatározása szempontjából tehát a $\sum\limits_{1\leq i\leq n} x_i > 0$ eset a lényeges, ezt vizsgáljuk tovább. Osszuk el az egyenlőtlenség mindkét oldalát a pozitív $\left(\sum\limits_{1\leq i\leq n} x_i\right)^4$ számmal:

$$\sum_{1\leq i<j\leq n} \frac{x_i}{\sum\limits_{1\leq k\leq n} x_k}\cdot\frac{x_j}{\sum\limits_{1\leq k\leq n} x_k}\left(\left(\frac{x_i}{\sum\limits_{1\leq k\leq n} x_k}\right)^2+\left(\frac{x_j}{\sum\limits_{1\leq k\leq n} x_k}\right)^2\right) \leq C.$$

Legyen $a_i = \dfrac{x_i}{\sum\limits_{1\leq k\leq n} x_k}$, így $\sum\limits_{1\leq i\leq n} a_i = 1$ és $0 \leq a_i \leq 1$. Az egyenlőtlenség új alakja:

$$\sum_{1\leq i<j\leq n} a_i a_j(a_i^2+a_j^2) \leq C.$$

Becsüljük most meg a bal oldal $a_i^2+a_j^2$ tényezőit felülről $\sum\limits_{1\le k\le n} a_k^2$-tel:

$$\sum_{1\le i<j\le n} a_ia_j(a_i^2+a_j^2)\le \sum_{1\le i<j\le n} a_ia_j \sum_{1\le k\le n} a_k^2=\left(\sum_{1\le k\le n} a_k^2\right)\left(\sum_{1\le i<j\le n} a_ia_j\right).$$

A második tényezőt ki tudjuk fejezni, mivel

$$\left(\sum_{1\le k\le n} a_k\right)^2=\sum_{1\le k\le n} a_k^2+2\sum_{1\le i<j\le n} a_ia_j,$$

tehát $\sum\limits_{1\le k\le n} a_k=1$ alapján

$$\sum_{1\le i<j\le n} a_ia_j=\frac{1-\sum\limits_{1\le k\le n} a_k^2}{2}.$$

Legyen $M=\sum\limits_{1\le k\le n} a_k^2$, így

$$\sum_{1\le i<j\le n} a_ia_j(a_i^2+a_j^2)\le M\frac{1-M}{2}=\frac{M-M^2}{2}=\frac{1}{8}\left(1-(2M-1)^2\right)\le\frac{1}{8},$$

mert $(2M-1)^2\ge 0$.

$\frac{1}{8}$-dal az állítás tehát igaz. Kimutatjuk, hogy ez már éles is, tehát $C=\frac{1}{8}$. Megnézzük, mikor állhat itt egyenlőség. Pontosan akkor, ha

$$(2M-1)^2=0,\qquad \text{azaz}\qquad M=\frac{1}{2},\qquad \text{valamint}$$
$$a_ia_j(a_i^2+a_j^2)=a_ia_jM\qquad \text{minden } i\ne j \text{ párra.}$$

Ha lenne három pozitív a szám: a_i, a_j, $a_k>0$, akkor a második feltétel sérülne, hiszen

$$a_ia_j(a_i^2+a_j^2)<a_ia_j(a_i^2+a_j^2+a_k^2)\le a_ia_jM.$$

Tehát két szám, a_i és a_j kivételével a többi a szám nulla. Tehát $\sum\limits_{1\le k\le n} a_k=1$ miatt $a_i+a_j=1$ és $a_i^2+a_j^2=\frac{1}{2}$ $M=\frac{1}{2}$ miatt.

Azaz $a_i^2+(1-a_i^2)=\frac{1}{2}$, vagyis $4a_i^2-4a_i+2=1$, tehát $(2a_i-1)^2=0$, tehát $a_i=\frac{1}{2}$, amiből $a_j=\frac{1}{2}$.

Ekkor ráadásul a bal oldal értéke éppen $\frac{1}{8}$, tehát $C=\frac{1}{8}$.

Ha $a_i=a_j=\frac{1}{2}$, akkor $x_k=0$, ha $k\ne i$, j és $x_i=x_j>0$. Azonban $x_i=0$, $i=1,2,\ldots,n$ is egyenlőséget eredményez, a (b) részre tehát a válasz:

Egyenlőség akkor és csak akkor áll, ha az x-ek közül $n-2$ darab 0-val egyenlő, a maradék kettő pedig egymással egyenlő.

Lukács László megoldása

3. *Tekintsünk egy $n\times n$-es négyzet alakú táblát, ahol n rögzített páros pozitív egész. A tábla n^2 egységnégyzetre van felosztva. Azt mondjuk, hogy a tábla két különböző négyzete* szomszédos, *ha van egy közös oldaluk.*
A táblán N egységnégyzet meg van jelölve olymódon, hogy minden négyzet (jelölt, vagy nem jelölt) szomszédos legalább egy jelölt négyzettel.
Határozzuk meg N lehetséges legkisebb értékét.

Megoldás. Osszuk be a négyzetet keretekre az ábra szerint, és kívülről kezdve színezzünk minden második keretet feketére. A táblán minden mező pontosan két feketével szomszédos, tehát már ahhoz is meg kell jelölnünk a fekete mezőknek legalább a felét, ha csak annyit akarunk, hogy minden fekete mezőnek legyen megjelölt szomszédja. N tehát legalább ezek számának fele. Számoljuk ezt össze abban az esetben, amikor n 4-gyel is osztható, illetve ha 4-gyel nem osztható (az ábrán a színezés az a) esetnek megfelelő).

$$4\mid n:\quad \frac{1}{2}\left[12+(16+12)+\cdots+\left(\frac{n-4}{4}16+12\right)\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{n}{4}12+16\frac{n-4}{4}\cdot\frac{n}{4}\cdot\frac{1}{2}\right]=\text{a)}\qquad=\frac{1}{2}\left[3n+\frac{n(n-4)}{2}\right]=\frac{n^2+2n}{4},$$

$4 \not| n: \quad \frac{1}{2}\left[4+(4+16)+\cdots+\left(4+\frac{n-2}{4}16\right)\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{n+2}{4}4+16\frac{n-2}{4}\cdot\frac{n+2}{4}\cdot\frac{1}{2}\right]= \text{b)} \qquad =\frac{1}{2}\left[n+2+\frac{n^2}{2}-2\right]=\frac{n^2+2n}{4}$

Ezt az értéket viszont el is érhetjük, csak a fekete kereten belül jelölve ki mezőket az alábbi módon: a fekete keretek bal alsó sarkából indulva két szomszédos mezőt kijelölünk, majd kettőt nem, majd kettőt megint igen stb., mindig a keret mentén lépegetve. Így nyilván minden keret felét jelöljük ki, így nyilván összesen $\frac{n^2+2n}{4}$ mezőt. A fekete keretek mezőinek nyilván lesz jelölt szomszédja, a fehér keretek mezői mellett pedig van valamelyik szomszédos fekete kereten jelölt mező, hiszen ezek közül a belső jelölését pontosan kettővel „feljebb” kezdtük el, így a két keret jelölt mezői váltogatják egymást.

N lehetséges legkisebb értéke tehát $\frac{n^2+2n}{4}$. A jelölést pl. $n=2$, 4, 6, 8-ra az *ábra* mutatja.

Kiss Gergely és *Keszegh Balázs*[1] *Keszegh Balázs,* a budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium tanulója, a szlovák csapat tagjaként vett részt a versenyen. megoldása alapján

Megjegyzés. $n=4k+1$-re $\frac{n^2+2n+1}{4}$, $n=4k+3$-ra $\frac{n^2+2n-3}{4}$ mezőt kell kijelölni. Ennek bizonyítását itt nem közüljük.

4. *Határozzuk meg az összes olyan, pozitív egészekből álló $(n,\ p)$ párt, hogy p prím, $n \le 2p$, és $(p-1)^n+1$ osztható n^{p-1}-gyel.*

Megoldás. Föltehető, hogy $n>1$, hiszen $n=1$ tetszőleges p prímmel megoldás. Legyen q az n *legkisebb* prímosztója, azaz $n=q^\alpha\cdot m$, ahol $q \not| m$. q választásából látszik, hogy $(q,\ m)=1$, és az is, hogy az m páratlan. Ekkor $q \mid n \mid (p-1)^n+1$, azaz

$$(p-1)^{q^\alpha\cdot m}\equiv -1 \pmod q.$$

A kis Fermat-tétel szerint $(p-1)^q\equiv p-1 \pmod q$. Ennek ismételt alkalmazásával

$$(p-1)^n\equiv (p-1)^m \pmod q, \qquad \text{és így} (p-1)^m\equiv -1 \pmod q.(1)$$

Ebből az is következik, hogy $(q,\ p-1)=1$, tehát ismét felhasználva a kis Fermat-tételt

$$(p-1)^{q-1}\equiv 1 \pmod q. \tag{2}$$

(1)-et négyzetre emelve

$$(p-1)^{2m}\equiv 1 \pmod q \tag{3}$$

Ha d jelöli $q-1$ és $2m$ legnagyobb közös osztóját, akkor az euklideszi algoritmus felhasználásával (2)-ből és (3)-ból $(p-1)^d\equiv 1 \pmod q$ következik.

A d meghatározásához vegyük észre, hogy q választása szerint az m minden prímosztója nagyobb q-nál, így $(q-1)$-nek és m-nek nincs közös prímosztója. Így $d=(q-1,\ 2m)$ vagy 1, vagy pedig 2. Így mindenképpen $(p-1)^2\equiv 1 \pmod q$.

Ez pontosan akkor teljesül, ha $p-1\equiv 1 \pmod q$, vagy pedig $p-1\equiv -1 \pmod q$.

Az első esetben (1)-ből $(p-1)^m\equiv 1\equiv -1 \pmod q$, azaz $q=2$ és így $p\equiv 2 \pmod q$ miatt $p=2$. Ekkor a feltételből $n=2$ következik, és így a $p=2$, $n=2$ megoldást kapjuk.

A második esetben $p-1\equiv -1 \pmod q$, azaz $q\mid p$, és így $q=p>2$, $n=p^\alpha\cdot m$, a feltételből pedig

$$p^{\alpha(p-1)} \mid (p-1)^n+1 \tag{4}$$

következik.

Megmutatjuk, hogy p kitevője $(p-1)^n+1$ prímtényezős felbontásában pontosan $\alpha+1$. Ebből aztán (4) szerint $\alpha(p-1)\le\alpha+1$, azaz $\alpha\cdot(p-2)\le 1$, tehát $\alpha=1$ és $p=3$ adódik.

$1+(p-1)^n$ a binomiális tétel szerint (az n páratlan):

$$1+\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}p^k=\underbrace{1-1}_{0}+\binom{n}{1}p+\sum_{k=2}^{n}(-1)^{n-k}\cdot\binom{n}{k}\cdot p^k.$$

Az összeg első tagja $\binom{n}{1}p=p^{\alpha+1}\cdot m$, és tudjuk, hogy $p \not| m$. Azt állítjuk, hogy a további tagok valamennyien oszthatók $p^{\alpha+2}$-vel, és így $1+(p-1)^n=p^{\alpha+1}(m+p\cdot K)$ alakú, és így a második tényező valóban nem osztható p-vel.

Legyen tehát $k\ge 2$, és tekintsük a k-adik tagot $(n=p^\alpha\cdot m)$:

$$\binom{n}{k}p^k=\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}\cdot p^k=\frac{p^{\alpha+k}\cdot m}{k}\binom{n-1}{k-1}.$$

[1] *

Ha $p \geq 3$ és $k \geq 2$, akkor $p^{k-1} > k$ (ez k-ra vonatkozó indukcióval nyilvánvaló), és így a p prímszám kitevője a k nevezőben legfeljebb $k-2$. Mivel a $p^{\alpha+k} \cdot m \cdot \binom{n-1}{k-1}$ szorzatban csak a k-val való osztás csökkentheti a p kitevőjét, azért ez a kitevő valóban legalább $\alpha + k - (k-2) = \alpha + 2$.

A második esetben tehát arra jutottunk, hogy a p prímszám csak 3 lehet, a feltétel pedig így

$$n^2 \mid 2^n + 1.$$

Ismeretes, hogy ez csak az $n = 1$ és $n = 3$ esetben teljesül. Ez volt az 1990. évi pekingi Matematikai Diákolimpia 3. feladata. Megoldása megtalálható *Reiman István:* Nemzetközi Matematikai Diákolimpiák 1959–1994 (Typotex Kiadó, Budapest, 1997) című könyvének 442–444. oldalán.

Megjegyzés. Az $n \leq 2p$ feltétel felhasználásával természetesen nincs szükség erre a hivatkozásra.

Zábrádi Gergely megoldása

5. *A Γ_1 és Γ_2 körök a Γ kör belsejében vannak és érintik a Γ kört a különböző M, ill. N pontokban. Γ_1 átmegy a Γ_2 kör középpontján. A Γ_1 és Γ_2 körök két metszéspontján átmenő egyenes a Γ kört az A és B pontokban metszi. Az MA és MB egyenesek Γ_1-et a C, ill. D pontokban metszik.*

Bizonyítsuk be, hogy CD érintője a Γ_2 körnek.

Megoldás. Először meghatározzuk az O pont AB-től mért d távolságát (a távolságok végig előjelesek). Invertáljunk a Γ_2 körre. Γ_1 kör képe egyenes, mert átmegy az O_2 ponton; ezen az egyenesen vannak Γ_1 és Γ_2 közös pontjai, így Γ_1 képe az AB egyenes. Γ képe érinti Γ_1, ill. Γ_2 képét, tehát az AB egyenest és a Γ_2 kört; AB-t M képében, M'-ben érinti (M' az O_2M és AB metszéspontja), Γ_2-t N-ben (N képe önmaga), tehát Γ' középpontja, T az ON egyenes metszéspontja az AB-re M'-ben állított merőlegessel. A Γ' kör átmérője, $2R' = R_2 + \frac{R_2^2}{2R - R_2} = \frac{2RR_2}{2R - R_2}$ (ha N átellenes pontja Γ-n U, Γ'-n U', akkor az új átmérő hossza $NO_2 + O_2U' = R_2 + \frac{R_2^2}{O_2U}$).

Tehát T távolsága AB-től $\frac{RR_2}{2R - R_2}$.

O_2 távolsága az inverzió miatt AB-től $\frac{R_2^2}{2R_1}$ (ugyanis az O_2-ből AB-re bocsátott merőleges talppontja a Γ_1 kör O_2-vel átellenes pontjának képe lesz.)

$$O_2T = R_2 - \frac{\frac{2RR_2}{2R-R_2}}{2} = \frac{RR_2 - R_2^2}{2R - R_2} = \frac{R_2(R - R_2)}{2R - R_2} OO_2 = R - R_2 OT = \frac{2R(R - R_2)}{2R - R_2},$$

tehát

$$\lambda = \frac{O_2T}{OT} = \frac{R_2}{2R} 1 - \lambda = \frac{OO_2}{OT} = \frac{2R - R_2}{2R}.$$

Ezekből látható, hogy ha O távolsága AB-től d, akkor O_2 távolsága AB-től

$$\lambda \cdot d + (1 - \lambda) \cdot TM' = \frac{R_2^2}{2R_1}.$$

Tehát

$$d = \frac{1}{\lambda} \frac{R_2^2}{2R_1} - \frac{1 - \lambda}{\lambda} \cdot \frac{RR_2}{2R - R_2} = \frac{RR_2}{R_1} - R = \frac{R(R_2 - R_1)}{R_1}.$$

Ebből kiszámolhatjuk O_1 távolságát CD-től. Γ_1 középpontosan hasonló Γ-hoz. A hasonlóság középpontja M, aránya $\frac{R_1}{R}$. A Γ-t Γ_1-be vivő hasonlóság O-t O_1-be, AB-t CD-be viszi, tehát O_1 és CD távolsága

$$d_1 = \frac{R_1}{R} \cdot d = R_2 - R_1,$$

ez éppen az igazolandó, mert így O_2 távolsága CD-től $d_1 + R_1$ ($AB \parallel CD$ miatt), ami nem más, mint R_2. Ezzel a bizonyítást befejeztük.

Gyenes Zoltán megoldása

6. *Határozzuk meg az összes olyan $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvényt, amelyre*

$$f(x - f(y)) = f(f(y)) + x f(y) + f(x) - 1$$

teljesül minden x, $y \in \mathbf{R}$ esetén.

Megoldás. x helyére $f(y)$-t helyettesítve és a $k = f(0)$ jelölést használva:

$$f(0) = f(f(y)) + (f(y))^2 + f(f(y)) - 1 f(f(y)) = \frac{1}{2}\left(k + 1 - (f(y))^2\right).$$

Ezt beírva az eredeti feltételbe:

$$f\left(x-f(y)\right)=\frac{1}{2}\left(k-1-(f(y))^2\right)+xf(y)+f(x).$$

Legyen $g(x)=f(x)+\dfrac{x^2}{2}$. Ekkor

$$g\left(x-f(y)\right)=f\left(x-f(y)\right)+\frac{(x-f(y))^2}{2}==\frac{1}{2}\left(k-1-(f(y))^2\right)+xf(y)+g(x)-\frac{x^2}{2}+\frac{(x-f(y))^2}{2},g\left(x-f(y)\right)=xf(y)+g(x$$

Először belátjuk, hogy $k=1$. Mivel az azonosan 0 függvény nem megoldás, létezik olyan $y\in\mathbf{R}$, amelyre $f(y)\neq 0$, így $x=\dfrac{1}{f(y)}$-t helyettesíthetünk az eredeti képletbe:

$$f(x-f(y))=f(f(y))+f(x),\qquad \text{azaz} \qquad f(a)=f(b)+f(c)$$

alakú egyenlőséget kapunk.

$$g(x-f(a))=g(x)+\frac{k-1}{2},\qquad g((x-f(b))-f(c))=g(x-f(b))+\frac{k-1}{2}=g(x)+k-1.$$

E kettő egyenlőségéből $k-1=\dfrac{k-1}{2}$, azaz $k=1$ következik.

Ekkor viszont $g\left(x-f(y)\right)=g(x)$, tehát $f(x)$ minden x-re periódusa g-nek. Másrészt $f(0)=k=1$, ebből

$$f(1)=f\left(f(0)\right)=\frac{1}{2}\left(1+1-1\right)^2=\frac{1}{2},$$

tehát $\dfrac{1}{2}$ függvényérték, és így g-nek periódusa. De

$$f\left(x-1\right)=f\left(x-f(0)\right)=f\left(f(0)\right)+xf(0)+f(x)-1=\frac{1}{2}+x+f(x)-1=f(x)-\frac{1}{2}+x$$

is függvényérték, tehát g-nek periódusa.

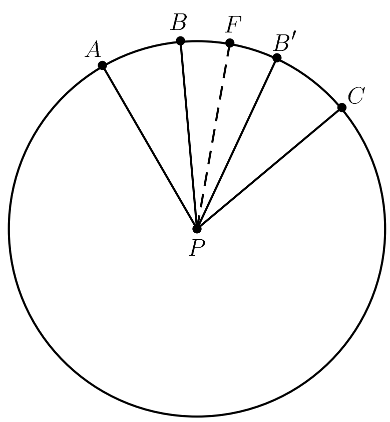
Azt kaptuk, hogy g-nek periódusa $f(x)$, $f(x-1)$ és $\dfrac{1}{2}$, tehát ugyancsak periódus az $f(x)-f(x-1)+\dfrac{1}{2}$, ami pedig éppen x.

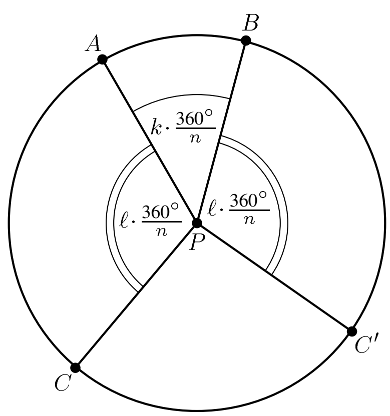
Tehát g minden szám szerint periodikus és csak így konstans lehet.

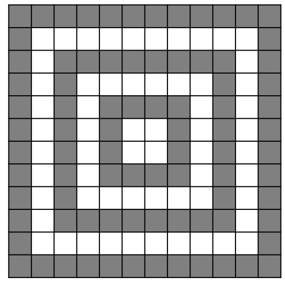
$g(0)=f(0)+\dfrac{0^2}{2}=1$, tehát $g(x)=1$, amiből $f(x)=1-\dfrac{x^2}{2}$.

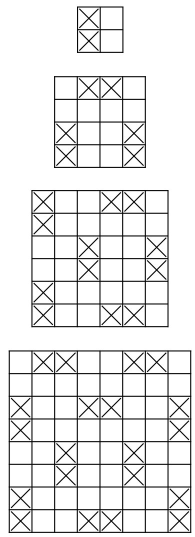
Behelyettesítéssel meggyőződhetünk róla, hogy ez valóban megoldás is.

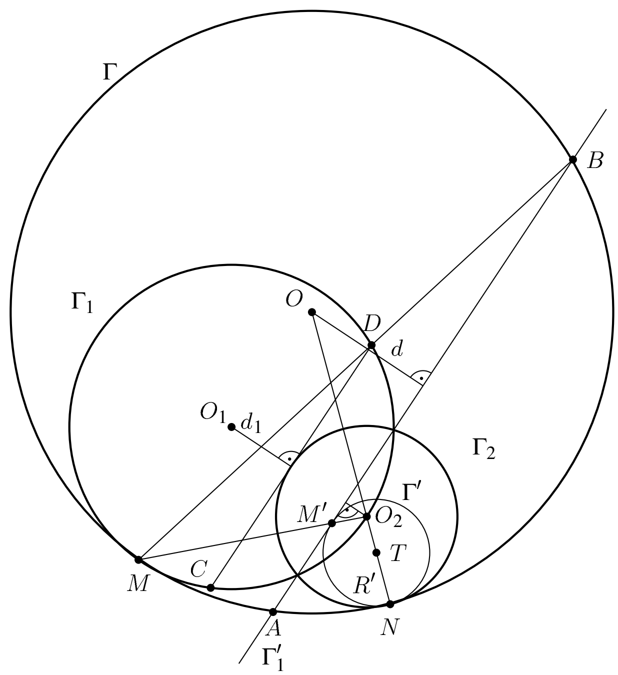
Terpai Tamás megoldása










Γ
B
Γ_1
O
D
d
O_1
d_1
Γ_2
Γ'
M'
O_2
T
R'
M
C
A
N
Γ_1'