1. Tudjuk, hogy $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}(\pi-\alpha)=0$. Ezért $a=0$, mert párosíthatjuk a tagokat, az elsőt az utolsóval, a másodikat az ötödikkel, a harmadikat pedig a negyedikkel.

$$b=\sin^{\cos 60^\circ}+\cos^{\sin 60^\circ}30^\circ=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{\frac{1}{2}}=2\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{2\sqrt{3}}.c_1=3,\quad c_2=2\cdot\sqrt{3},\quad c_3=2\sqrt{2\sqrt{3}}=2b.$$

Vagyis $n=3$ esetén lesz az a, b és c_3 egy számtani sorozat három egymást követő tagja.

2. Az egyenlet diszkriminánsa: $D=36(a+b)^2-20(a+b)^2=16(a+b)^2$. Látható, hogy minden esetben van gyök, ezek a megoldóképlet segítségével: $x_{1,\,2}=\dfrac{6(a+b)\pm 4(a+b)}{10}$, amiből $x_1=a+b$, $x_2=\dfrac{a+b}{5}$. Mivel a feladat szövege szerint $1<a+b<5$, ezért $1<x_1$, $0,2<x_2<1$, az egyenlet egyik gyöke valóban 0-nál nagyobb, de 1-nél kisebb, a másik gyöke pedig 1-nél nagyobb.

A feladat állításának megfordítása:

Az $5x^2-6(a+b)x+a^2+b^2+2ab=0$ másodfokú egyenletben az a és a b valós paraméterek, amelyekre az egyenlet egyik gyöke 0-nál nagyobb, de 1-nél kisebb, a másik pedig 1-nél nagyobb. Mutassuk meg, hogy $1<a+b<5$.

A szöveg alapján az egyenletnek van két különböző, pozitív gyöke: $x_1=a+b$, $x_2=\dfrac{a+b}{5}$. Ezért $x_2<x_1$, vagyis $0<\dfrac{a+b}{5}<1$, $1<a+b$. Ez azt jelenti, hogy valóban $1<a+b<5$.

3. Nézzük az $N=n^5-5n^3+4n$ kifejezést. Mivel

$$n^5-5n^3+4n=n(n^4-5n^2+4)=n(n^2-1)(n^2-4)=(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2),$$

azért N minden n egész esetén osztható 5-tel.

Az m értéke negatív nem lehet, mert ekkor A értéke nem egész.

Ha $m=0$, akkor $A=N$, vagyis ekkor minden n egész szám megfelelő.

Vizsgáljuk végül az $m>0$ esetet.

A 2 pozitív egész kitevőjű hatványairól tudjuk, hogy az utolsó jegyük periodikusan ismétlődik: 2, 4, 8, 6, 2, ... Az

$$A=n^5-5n^3+4n-2^m+1=(n^5-5n^3+4n)-(2^m-1)$$

átalakítása után látjuk, hogy 2^m-1 is osztható kell legyen 5-tel. Így 2^m utolsó jegye csak 6 lehet, vagyis m 4-gyel osztható pozitív egész.

A három lehetőség alapján a megoldás: n tetszőleges egész szám, m pedig tetszőleges 4-gyel osztható természetes szám.

4. A COB háromszögben $\dfrac{z}{y}=\dfrac{\sin\frac{\beta}{2}}{\sin 45^\circ}$, a BOA háromszögben pedig $\dfrac{x}{AB}=\dfrac{\sin\frac{\beta}{2}}{\sin 135^\circ}$. Így $\dfrac{z}{y}=\dfrac{x}{AB}$, ami $\dfrac{1}{z^2}=\dfrac{AB^2}{x^2y^2}$ alakban is írható. A BOA háromszögben $AB^2=x^2+y^2-2xy\cdot\cos 135^\circ$, és így

$$\left(\frac{1}{z}\right)^2=\frac{x^2+y^2-2xy\cdot\cos 135^\circ}{x^2y^2}.$$

Ezt szorozzuk meg $x^2y^2z^2$-tel: $(xy)^2=(xz)^2+(yz)^2-2(xz)(yz)\cdot\cos 135^\circ$.

Ez éppen a koszinusztétel az xy, xz és yz oldalhosszúságú háromszögben. Látható, hogy az xy oldallal szemben van a 135°-os szög.

5. A három kör középpontja $A(-2;5)$, $B(4;-3)$, $C(1;6)$, ezek a pontok egy derékszögű háromszög csúcsai, hiszen $AB=10$, $BC=3\sqrt{10}$, $CA=\sqrt{10}$ és $AB^2=BC^2+CA^2$. Az ABC háromszög köréírt körének sugara 5, a kör középpontja pedig az AB átfogó felezőpontja, $F(1;1)$. Mivel a feladatban megadott körök mindegyikének 1 a sugara, azért a keresett kör középpontja az F pont, a sugara pedig 1 egységgel nagyobb, mint az ABC háromszög köréírt körének sugara. A keresett egyenlet: $(x-1)^2+(y-1)^2=36$.

6. Szorozzuk meg az egyenlet mindkét oldalát abc-vel:

$$bc^2-b^2c+a^2c-ac^2+ab^2-a^2b=0.$$

A kapott egyenlőség bal oldala szorzattá alakítható:

$$(ca^2-ba^2)+(c^2b-b^2c)-(c^2a-b^2a)=(c-b)[a^2+bc-(c+b)a]=$$
$$=(c-b)[(a^2-ac)-(ba-bc)]=(c-b)(a-c)(a-b)=0.$$

Tudjuk, hogy egy szorzat pontosan akkor 0, ha legalább az egyik tényezője 0, ezért a számtani sorozatnak van két egyenlő tagja. Ekkor azonban minden tagja egyenlő. Vagyis $S_n=nx$, ahol x az első tag.

7. Végezzük el a következő átalakításokat:

$$\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x =$$
$$= 1 - \frac{\sin^2 2x}{2} = 1 - \frac{1 - \cos 4x}{4} = \frac{3}{4} + \frac{\cos 4x}{4}.$$

A $\frac{\cos 4x}{4}$ képe a $\cos x$ képéből középpontos hasonlósággal kapható. Ennek középpontja az origó, aránya pedig $\frac{1}{4}$.

8. A második egyenletet felhasználva: $(x-72)+(y+1998)=1999+1926$.

Legyen $a=\sqrt[3]{x-72}$, $b=\sqrt[3]{y+1998}$, ekkor az egyenletrendszerünk ilyen alakot vesz fel:

$$a+b=25, a^3+b^3=3925.$$

Az első egyenletből kifejezzük b-t, ezt beírjuk a másodikba: $a^3+(25-a)^3=3925$. Rendezzük az egyenletet:

$$a^3+15\ 625-1875a+75a^2-a^3=3925, 75a^2-1875a+11\ 700=0, a^2-25a+156=0,$$

amiből $a_1=12$, $a_2=13$. A megfelelő b értékek: $b_1=13$, $b_2=12$.

Az eredeti ismeretlenek, x és y: $x_1=1800$, $y_1=199$, valamint $x_2=2269$, $y_2=-270$.

Számadó László