Erdély legrangosabb matematikaversenyének döntő fordulóját Sepsiszentgyörgyön, 1999. február 20-án tartották meg. A kitűzött példák megoldására 3 óra állt rendelkezésre.[1] A feladatok eredeti szövegét közöljük. A használt jelölések, kifejezések és egyes témakörök néhány esetben nem szerepelnek a hazai tananyagban. Ezért az Olvasóktól elnézést kérünk. A szerk.

IX. osztály

1. a) Határozd meg az összes olyan $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}^*$ függvényt, amelyre

$$(x+1)f(x) - xf(x+1) = 1, \qquad \forall x \in \mathbf{N}.$$

Ezek közül melyek szürjektívek?

b) Van-e olyan $f : \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}$ függvény, amely teljesíti a következő feltételeket:

$$(x+1)f(x) - xf(x+1) = 1, \qquad \forall x \in \mathbf{R}_+^*,$$

és f végtelen sok értékre 1-nél szigorúan nagyobb, végtelen sok értékre pedig 1-nél szigorúan kisebb értéket vesz fel?

Kacsó Ferenc, Marosvásárhely

2. Az ABC háromszög (BC), (CA), (AB) oldalain rendre felvesszük az M, N, P pontokat úgy, hogy $\dfrac{BM}{CM} = \dfrac{CN}{AN} = \dfrac{AP}{BP} = k > 0$. A háromszögön kívül megszerkesztjük az (AN)-nel párhuzamos és kongruens (MQ) szakaszt. Bizonyítsd be, hogy:

a) $QC \parallel AB$ b) PQ felezi a (BC) szakaszt.

Szöllősy György, Máramarossziget

3. Igazold, hogy bármely $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$-re érvényes az alábbi egyenlőtlenség:

$$\cos(x_1 - x_2) \cdot \cos(x_2 - x_3) \cdot \dots \cdot \cos(x_n - x_1) \geq \sin 2x_1 \cdot \sin 2x_2 \cdot \dots \cdot \sin 2x_n.$$

Bencze Mihály, Brassó

4. Legfeljebb hány tagja lehet annak a parlamenti bizottságnak, amelyben bármely két tag barát vagy ellenség, senkinek sincs tíznél több ellensége, és bármely hármas csoportban legalább két tag egymás ellensége?

Bege Antal, Kolozsvár

X. osztály

1. Bizonyítsd be, hogy ha $a, b, c \in (0, 1)$, akkor:

$$\log_a \frac{3bc}{bc + a(b+c)} + \log_b \frac{3ca}{ca + b(c+a)} + \log_c \frac{3ab}{ab + c(a+b)} \geq 0,$$

Mikor áll fenn az egyenlőség?

Kovács Béla, Szatmárnémeti

2. Bizonyítsd be, hogy ha $a, b, c \in \mathbf{C}^*$, $|a| = |b| = |c|$ és $az^2 + bz + c = 0$, akkor

$$|z| \in \left[\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right].$$

Bencze Mihály, Brassó

3. a) Bizonyítsuk be, hogy a

$$\frac{1 - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8} + \alpha\right)}{1 + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8} + \alpha\right)} + \frac{1 - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8} - \alpha\right)}{1 + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8} - \alpha\right)} + \frac{\sqrt{2} \cdot \cos(2\alpha) - 1}{\sqrt{2} \cdot \cos(2\alpha) + 1}$$

kifejezés értéke állandó, ha α befutja a $\left[0, \dfrac{\pi}{8}\right]$ intervallumot.

b) Adott az $ABCD$ négyzet. Egy d egyenes az AB, AD és AC szakaszokat a P, Q, illetve R pontokban metszi. Bizonyítsd be, hogy ha d metszi a négyzetbe írt kört, akkor:

$$\frac{AP}{PB} + \frac{AQ}{QD} + \frac{AR}{RC} \geq 1.$$

[1] *

Mikor áll fenn egyenlőség?

Bege Antal, Kolozsvár

4. Igazold, hogy az $1, 2, \ldots, 1999$ természetes számok közül kiválasztható $a_1, a_2, \ldots, a_{11}$ úgy, hogy az $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{11} \in \{-1, 1\}$ minden lehetséges megválasztása esetén az

$$\varepsilon_1 a_1 + \varepsilon_2 a_2 + \cdots + \varepsilon_{11} a_{11}$$

összeg más-más értéket vegyen fel.

Dáné Károly, Marosvásárhely

XI. osztály

1. Adott az $A \in M_2(Q)$ mátrix. Bizonyítsd be, hogy

$$\det(2A^2 - 90A + 13I_2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2A^2 - 90A + 13I_2 = O_2.$$

Igaz marad-e a fenti állítás, ha $A \in M_2(R)$?

Bencze Mihály, Brassó

2. Számítsd ki az

$$x_n = \prod_{k=2}^{n} \frac{\ln(2k-1)}{\ln 2k} \qquad (n \geq 2)$$

általános tagú sorozat határértékét!

Bíró Béla, Sepsiszentgyörgy

3. Az (a_n), $n \in \mathbf{N}$ természetes számsorozatot az

$$a_n = 2 \cdot a_{\left[\frac{n}{2}\right]} + 1, \qquad a_1 = 1$$

összefüggésekkel értelmeztük. ($[x]$ az x valós szám egész részét jelöli.)

a) A sorozat hány tagja egyenlő 31-gyel?

b) Határozd meg az általános tag képletét!

c) Bizonyítsd be, hogy bármely páratlan p prímszám esetén létezik olyan n természetes szám, hogy a_n osztható p-vel!

Bege Antal és András Szilárd, Kolozsvár

4. Egy 22 tagú parlamenti bizottság bármely két tagja barát, vagy ellenség, de egyiküknek sincs 10-nél több ellensége, és bármely hármas csoportban legalább két bizottsági tag egymás ellensége.

Hány olyan négytagú csoport választható ki, amelynek legalább három tagja kölcsönösen egymás ellensége?

Bege Antal, Kolozsvár

XII. osztály

1. A $(G, \cdot)$ csoportban

$$(xy)^4 = y^4 x^4, \quad (xy)^7 = y^7 x^7 \quad \text{és} \quad (xy)^{10} = y^{10} x^{10}$$

bármely $x, y \in G$ esetén. Bizonyítsd be, hogy $(G, \cdot)$ kommutatív csoport!

András Szilárd, Kolozsvár

2. Adott a következő sorozat: $a_0 \in \mathbf{R}$, $a_{n+1} = 4a_n - a_n^2$. Igazoljuk, hogy bármely pozitív egész n esetén létezik olyan a_0, hogy a sorozatnak pontosan n különböző értéke van.

Dáné Károly, Marosvásárhely

3. Jelöljük H-val a szabályos hatszög összes lehetséges színezését 2-színnel (a csúcsok számozva vannak és minden csúcs lehet fehér vagy fekete). Az sz_1 és sz_2 színezésekhez hozzárendeljük az sz_3 színezést a következő szabályok szerint:

1) Ha sz_1 és sz_2 két megfelelő csúcsa különböző színű, akkor sz_3 megfelelő csúcsa fekete lesz.

2) Ha sz_1 és sz_2 két megfelelő csúcsa azonos színű, akkor sz_3 megfelelő csúcsa fehér lesz.

a) Igazold, hogy az előbbi megfeleltetés művelet H-n és H ezzel a művelettel kommutatív csoport.

b) Bizonyítsuk be, hogy az a) pontban szereplő csoport izomorf a $(\mathcal{P}(A), \Delta)$ csoporttal, ahol $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ és

$$X \Delta Y = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$$

a szimmetrikus különbség.

Bege Antal és András Szilárd, Kolozsvár

4. Jelölje F az $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ egy primitív függvényét. Határozd meg f-et, ha

$$f(x-1) \cdot F(3-x) = -x^2 + 4x - 3, \qquad \forall x \in \mathbf{R} \quad \text{és} \quad f(1) = 1.$$

Bencze Mihály, Brassó