11. osztály

1. Oldjuk meg az alábbi másodfokú egyenletet:

$$(x-1)^2+(x-2)^2+\cdots+(x-1998)^2+(x-1999)^2=1999x^2.$$

2. Egy 7 egység oldalú négyzetben 99 pont helyezkedik el úgy, hogy közülük semelyik három sincs egy egyenesen. Igazoljuk, hogy ezek közül kiválasztható három olyan, hogy az általuk kifeszített háromszög területe nem nagyobb $\frac{1}{2}$ területegységnél.

3. Legyen egy háromszög súlyvonalainak hossza s_a, s_b, s_c. Igazoljuk, hogy

$$s_a^2+s_b^2+s_c^2=\frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2).$$

4. Egy n oldalú (síkbeli) sokszög csúcsai A_1, A_2, ..., A_n. Tudjuk, hogy a sík bármely P pontját az A_1, A_2, ..., A_n csúcsokra egymás után (n-szer) tükrözve, visszakapjuk a kiindulási P pontot. Igazoljuk, hogy ekkor n páros, és hogy a sokszög páratlan, illetve páros indexű csúcsaiból készített sokszögek súlypontjai azonosak.

5. Igazoljuk, hogy ha x, y, z pozitív számok, akkor

$$x^5y^3z+y^5z^3x+z^5x^3y\le x^9+y^9+z^9.$$

12. osztály

1. Az $x^2+y^2-6x-4y-156=0$ egyenletű körvonalra illeszkednek az $ABCD$ négyzet csúcspontjai. Határozzuk meg a négyzet B, C és D csúcspontjainak koordinátáit, ha $A(8;-10)$.

2. Adott egy szabályos négyoldalú gúla. A gúla alaplapja és átlós metszete (a gúla alaplapjának átlóján átmenő és a gúla csúcspontjára illesztett síknak a gúlával alkotott metszete) területének összege megegyezik a gúla palástjának a felszínével. Határozzuk meg a gúlát határoló háromszögek szögeit.

3. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenlőtlenségeket:

$$1>\log_{\sin x}(\sin x+\cos 2x)>0.$$

4. Adjuk meg az

$$S_n=\frac{1^2}{1\cdot 3}+\frac{2^2}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)},\qquad n\in\mathbf{N}$$

összeget zárt alakban. Mennyi lesz $[S_{1999}]$ ($[a]$ az a egész részét jelöli.)

5. Helyezzünk el 1 és 58 között minimális számú egész számot úgy, hogy azok az eredetiekkel együtt egy számtani sorozat szomszédos tagjai legyenek, ha tudjuk, hogy a számuk között szerepel a 10 is. Hányadik elem a 10?