Jelöljük a keresett számot N-nel (N negatív is lehet). N prímtényezői azok és csak azok a prímszámok, amelyek összes osztóinak szorzatában szerepelnek. Ezért $N = 2^l \cdot 3^m \cdot 5^n$ (l, m, n pozitív egész számok). Jelölje $d(N)$ az N szám összes pozitív osztóinak számát, P pedig a szorzatukat. Ha N nem négyzetszám, akkor N minden pozitív osztójának van egy tőle különböző pozitív osztó párja, amellyel alkotott szorzata $|N|$, ezért $P = |N|^{\frac{d(N)}{2}}$. Ha N négyzetszám, akkor is elvégezhetjük a párosítást egy pozitív osztó, a $\sqrt{|N|}$ kivételével. Ekkor

$$P = |N|^{\frac{d(N)-1}{2}} \sqrt{|N|} = |N|^{\frac{d(N)}{2}}.$$

Minden esetben tehát

$$P = |N|^{\frac{d(N)}{2}}$$

$N = 2^l \cdot 3^m \cdot 5^n$ alakjából következik, hogy $d(N) = (l+1)(m+1)(n+1)$, hiszen N pozitív osztói a $2^i \cdot 3^j \cdot 5^k$ számok, ahol $0 \leqq i \leqq l$, $0 \leqq j \leqq m$, $0 \leqq k \leqq n$ egész számok, i, j, k egymástól függetlenül rendre $l+1$, $m+1$, $n+1$ különböző értéket vehetnek fel. Az eddigiek alapján

$$2^{120} \cdot 3^{60} \cdot 5^{90} = (2^l \cdot 3^m \cdot 5^n)^{\frac{(l+1)(m+1)(n+1)}{2}} \tag{1}$$

Ebből kiolvasható, hogy $l : m : n = 120 : 60 : 90$,
vagyis:

$$\begin{aligned} l &= 4t \\ m &= 2t \text{ (t pozitív egész szám).} \\ n &= 3t \end{aligned}$$

(Az azonos alapú hatványok kitevőinek a két oldalon meg kell egyezniük, hiszen ugyanannak a számnak a prímtényezős felbontásai nem lehetnek különbözőek.)

Ha most összehasonlítjuk pl. az (1) egyenlet két oldalán szereplő 3 alapú hatványok kitevőit, a

$$t(4t+1)(2t+1)(3t+1) = 60$$

egyenletet kapjuk, amelynek a pozitív egész számok körében egyetlen megoldása van:

$$t = 1.$$

(t növelésével a bal oldalon álló kifejezés értéke szigorúan monoton nő.) Ezek szerint $N = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^3 = 18\ 000$, vagyis a keresett szám 18 000 lehet. (L.L.)

Knébel István (Budapest, József A. Gimn., IV. o. t.)