**1.** Húzzuk meg a trapéz két magasságát. Ekkor két derékszögű háromszöget kapunk. Az egyiknek az átfogója $14,3$ egység, a másiké $16,5$ egység. Mindkettőnek egyik befogója $13,2$ egység. Az ismeretlen befogók *előjeles* szakaszok, hosszuk $|x|$, illetve $|y|$.

$$|x|^2 = 14,3^2 - 13,2^2 = 5,5^2, \qquad \text{illetve} \qquad |y|^2 = 16,5^2 - 13,2^2 = 9,9^2,$$

azaz $x_1 = 5,5$ , $x_2 = -5,5$, illetve $y_1 = 9,9$, $y_2 = -9,9$.
(A szerkesztés vizsgálata is mutatja, hogy a feltételeknek négy trapéz felel meg.)

A trapézok másik párhuzamos oldalának hossza:

$22 - 5,5 - 9,9 = 6,6$ egység, $\qquad 22 + 5,5 - 9,9 = 17,6$ egység, $22 + 9,9 - 5,5 = 26,4$ egység, $\qquad 22 + 9,9 + 5,5 = 37,4$ egység.

A négy trapéz területe: $T_1 = 188,76$ területegység, $T_2 = 261,3$ területegység, $T_3 = 313,44$ területegység, $T_4 = 392,04$ területegység.

**2.** Mindkét kifejezés $n(n+1)(n+2)(n+3)$ alakba írható. A négy tényező közül kettő egymás után következő páros szám, így egyikük osztható 4-gyel, így szorzatuk 8-cal, a négy tényező közül legalább az egyik osztható 3-mal, tehát a négy tényező szorzata osztható $3 \cdot 8 = 24$-gyel.

**3.** A $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$ és a $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$ azonosságok alkalmazásával

$$\cos^2 x + \sin^4 x = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos^2 2x.$$

Mivel $0 \le \cos^2 2x \le 1$, ezért $\dfrac{3}{4} \le \cos^2 x + \sin^4 x \le 1$, így $1 \le \dfrac{1}{\cos^2 x + \sin^4 x} \le \dfrac{4}{3}$. Mivel a kifejezéssel megadott függvény folytonos, ezért az értékkészlet az $\left[1; \dfrac{4}{3}\right]$ intervallumba eső valós számok halmaza. A legkisebb értékét a függvény akkor veszi fel, ha $\cos^2 2x = 1$, tehát az $x = k \cdot \dfrac{\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$ helyeken, a legnagyobb értékét $\cos^2 2x = 0$ esetén veszi fel, tehát az $x = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$ helyeken.

*Megjegyzés.* Az adott kifejezés a következő módon is felírható:

a) $\left(\cos^2 x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4}$; $\qquad$ b) $\dfrac{7}{8} + \dfrac{1}{8}\cos 4x$.

**4.** Legyen az $\{a_n\}$ sorozat első négy eleme $a$, $aq$, $aq^2$, $aq^3$; a második sorozat első négy eleme ekkor $a$, $aq-3$, $aq^2-6$, $aq^3-36$. A $b_1$, $b_2$, $b_3$, $b_4$ elemekre egyrészt $b_2^2 = b_1b_3$, másrészt $b_1b_4 = b_2b_3$, tehát

$$(aq-3)^2 = a(aq^2-6) \qquad \text{és} \qquad a(aq^3-36) = (aq-3)(aq^2-6).$$

Rendezés után $2a(q-1) = 3$ és $a(q^2+2q-12) = 6$. Mivel $a \ne 0$ és $q \ne 1$, ezért

$$\frac{q^2+2q-12}{2(q-1)} = 2, \qquad q^2 - 2q - 8 = 0, \qquad q_1 = 4, \quad q_2 = -2.$$

Ha $q = 4$, akkor $a = \dfrac{1}{2}$, ha $q = -2$, akkor $a = -\dfrac{1}{2}$, így a két sorozat első négy eleme:

$$\frac{1}{2},\ 2,\ 8,\ 32, -\frac{1}{2},\ 1,\ -2,\ 4\text{illetve} \qquad \text{vagy} \qquad \text{illetve}\frac{1}{2},\ -1,\ 2,\ -4, -\frac{1}{2},\ -2,\ -8,\ -32.$$

**5.** Nyilván $x > 0$ kell, hogy legyen. Ha $\log_2 x = y$, akkor azonosságok alkalmazásával

(1)
$$\sqrt{y^2-5y+4} \le \sqrt{2y^2-5y}.$$

A két gyökös kifejezésnek akkor van értelme, ha

$$y^2 - 5y + 4 \ge 0 \quad \text{és} \quad 2y^2 - 5y \ge 0,$$

azaz ha $y \le 0$ vagy $y \ge 4$. Az (1) egyenlőtlenség mindkét oldala nemnegatív, ezért a négyzetre emelés ekvivalens egyenlőtlenségre vezet:

$$y^2 - 5y + 4 \le 2y^2 - 5y, \qquad y^2 \ge 4, \quad y \le -2 \ \text{ vagy } \ y \ge 2.$$

Az (1) egyenlőtlenség megoldásai: $y \le -2$ vagy $y \ge 4$. Az eredeti egyenlőtlenség akkor teljesül, ha

$$\log_2 x \le -2 \quad \text{vagy} \quad \log_2 x \ge 4,$$

azaz ha

$$0 < x \le \frac{1}{2} \quad \text{vagy} \quad x \ge 16.$$

**6.** Mivel $4\cos^2 x - 3 = 1 - 4\sin^2 x$, ezért

$$\left|\frac{4\sin^2 x - 1}{\cos x}\right| = -\frac{4\sin^2 x - 1}{\cos x},$$

ez pedig pontosan akkor teljesül, ha $\dfrac{4\sin^2 x - 1}{\cos x} \le 0.$

Ha $\cos x > 0$, akkor $4\sin^2 x - 1 \le 0$, $\sin^2 x \le \dfrac{1}{4}$, $|\sin x| \le \dfrac{1}{2}$.

Innen a $-\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \le x \le \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ számok az egyenlet megoldásai.

Ha $\cos x < 0$, akkor $4\sin^2 x - 1 \ge 0$, $\sin^2 x \ge \dfrac{1}{4}$, $|\sin x| \ge \dfrac{1}{2}$.

Innen a $\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ és a $\dfrac{7\pi}{6} + 2n\pi \le x < \dfrac{3\pi}{2} + 2n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$ számok a megoldások.

**7.** A vektorszerkesztés módszerével dolgozhatunk. A feltételeknek két trapéz felel meg. Az $A_1B_1CD$ átlóinak metszéspontja legyen $K$, az $A_2B_2CD$ átlóinak metszéspontja $L$, a $DC$ szakasz felezőpontja $F$.

$F\left(\dfrac{9}{2}; \dfrac{7}{2}\right)$. Így $\overrightarrow{DF}\left(\dfrac{3}{2}; \dfrac{1}{2}\right)$. Az $\overrightarrow{FK}$, illetve $\overrightarrow{FL}$ vektorok a $\overrightarrow{DF}$ $90°$-os elforgatottjai, tehát $\overrightarrow{FK}\left(-\dfrac{1}{2}; \dfrac{3}{2}\right)$ és $\overrightarrow{FL}\left(\dfrac{1}{2}; -\dfrac{3}{2}\right)$.

$$\overrightarrow{DK} = \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{FK} = (1;2), \qquad \overrightarrow{CK} = \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{FK} = (-2;1), \overrightarrow{CL} = -\overrightarrow{DK} = (-1;-2), \qquad \overrightarrow{DL} = -\overrightarrow{CK} = (2;-1).$$

Mivel

$$\overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{OC} + 4\overrightarrow{CK} = (6;4) + 4\cdot(-2;1) = (-2;8), \overrightarrow{OB_1} = \overrightarrow{OD} + 4\overrightarrow{DK} = (3;3) + 4\cdot(1;2) = (7;11), \overrightarrow{OA_2} = \overrightarrow{OC} + 4\overrightarrow{CL} = (6;4) + 4$$

ezért $A_1(-2;8)$, $B_1(7;11)$, $A_2(2;-4)$, $B_2(11;-1)$.

Érdemes megjegyezni, hogy

$$\overrightarrow{OA_2} = 2\overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OB_1} = (9;7) - (7;11) = (2;-4) \qquad \text{és} \overrightarrow{OB_2} = 2\overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OA_1} = (9;7) - (-2;8) = (11;-1).$$

**8.** Mivel $4x - x^2 - 5 = -1 - (x-2)^2 < 0$ minden valós $x$-re, ezért az $(a+2)x^2 - (a-1)x + a - 1 \ge 0$ *legfeljebb* másodfokú egyenlőtlenségre kell a válaszokat megadni.

Ha $a + 2 = 0$, $a = -2$, akkor a $3x - 3 \ge 0$ egyenlőtlenségnek végtelen sok megoldása van.

a) Ha $a + 2 \ne 0$, úgy pontosan akkor van egy megoldása az egyenlőtlenségnek, ha $a + 2 < 0$ és a polinom diszkriminánsa, $D = 0$.

$$D = (1-a)^2 - 4(a-1)(a+2) = -3(a+3)(a-1) = 0,$$

ha $a = -3$ vagy $a = 1$, így $a < -2$ miatt akkor van egyetlen megoldás, ha $a = -3$.

b) Az egyenlőtlenségnek nincs megoldása, ha $a + 2 < 0$ és $D < 0$, azaz ha $a < -3$. Végtelen sok megoldás akkor van, ha $a + 2 > 0$ vagy ($a + 2 < 0$ és $D > 0$) vagy $a = -2$, azaz ha $a > -3$.

**Rábai Imre**