1. a) Az egyenlet $2^x + 2\cdot 2^{\frac{x}{2}}\cdot 5^{\frac{x}{2}} - 3\cdot 5^x = 0$ alakban írható. Osszuk el az egyenlet mindkét oldalát 5^x-nel ($5^x > 0$). Ekkor

$$\left(\frac{2}{5}\right)^x + 2\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{x}{2}} - 3 = 0,$$

ahonnan $\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{x}{2}} = 1$ (hiszen $\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{x}{2}} > 0$), és így $x = 0$.

b) Legyen $x^2 - 3x + 4 = y$. Ekkor $y \geq \frac{7}{4}$ és

$$\frac{1}{y-1} + \frac{2}{y} = \frac{6}{y+1},$$

ahonnan $y = 2$ vagy $y = \frac{1}{3}$. Ha $y = 2$, akkor $x^2 - 3x + 4 = 2$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, és ezek az adott egyenletnek is megoldásai, ha $y = \frac{1}{3}$, akkor az egyenletnek nincs megoldása.

c) Azonos átalakítások után szorzattá alakíthatunk:

$$4\sin x\cos x + 2\sin x - (2\cos x + 1) = 0, (2\cos x + 1)(2\sin x - 1) = 0,$$

$\cos x = -\frac{1}{2}$ vagy $\sin x = \frac{1}{2}$, $x_{1,n} = \frac{2\pi}{3} + 2n\pi$, $x_{2,m} = -\frac{2\pi}{3} + 2m\pi$, $x_{3,k} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $x_{4,l} = \frac{5\pi}{6} + 2l\pi$, $n,\ m,\ k,\ l \in \mathbf{Z}$.

2. a) Ha $x \geq 0$, akkor $x^2 - 1 \leq -\frac{1}{2}$, $x^2 \leq \frac{1}{2}$, tehát $0 \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ a megoldás;

ha $x < 0$, akkor $(x+1)(-x-1) \leq -\frac{1}{2}$, azaz $(x+1)^2 \geq \frac{1}{2}$,

$|x+1| \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$, tehát $x + 1 \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$, $x \geq -1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$ vagy pedig $x + 1 \leq -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $x \leq -1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$, így ebben az esetben $x \leq -1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$ vagy $-1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \leq x < 0$ a megoldások.

b) Az egyenlőtlenség akkor és csak akkor teljesül, ha $\operatorname{tg} x = -1$, $x_n = -\frac{\pi}{4} + n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$, vagy ha $\operatorname{tg} x > 0$, $k\pi < x < \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

c) Az $x \mapsto \log_2 x$ függvény szigorú monoton növekedése miatt $4^x - 5\cdot 2^x + 8 > 2^2$, azaz $(2^x - 1)(2^x - 4) > 0$, tehát $2^x < 1$ vagy $2^x > 4$. Az egyenlőtlenség megoldásai: $x < 0$ vagy $x > 2$.

3. Az E pont ordinátája: $y_0 = 4$. Az e egyenes egy normálvektora $\mathbf{n}(4; -3)$ és $|\mathbf{n}| = 5$.

A feltételeknek két kör felel meg. A körök középpontja legyen K_1 és K_2. Ekkor

$$\overrightarrow{EK}_1 = 2\mathbf{n} = (8; -6) \qquad \text{és} \qquad \overrightarrow{EK}_2 = -\overrightarrow{EK}_1 = (-8; 6).$$

Így

$\overrightarrow{OK}_1 = \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{EK}_1 = (-2; 4) + (8; -6) = (6; -2)$ és $\overrightarrow{OK}_2 = \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{EK}_2 = (-2; 4) + (-8; 6) = (-10; 10)$, azaz $K_1 = (6; -2)$ és $K_2 = (-10; 10)$.

A körök egyenlete: $(x-6)^2 + (y+2)^2 = 100$, illetve $(x+10)^2 + (y-10)^2 = 100$.

4. Ha a gyökök aránya $3 : 2$, akkor $x_1 = 3t$, $x_2 = 2t$, $t \in \mathbf{R}$, így $5t = -\frac{b}{a}$ és $6t^2 = \frac{c}{a}$, tehát

$$6\cdot\left(-\frac{b}{5a}\right)^2 = \frac{c}{a},$$

ahonnan $6b^2 = 25ac$.

Ha $6b^2 = 25ac$, akkor $4ac = \frac{24}{25}b^2$, az egyenlet diszkriminánsa

$$D = b^2 - \frac{24}{25}b^2 = \left(\frac{b}{5}\right)^2,$$

így $x = \frac{-b \pm \frac{b}{5}}{2a}$, $x_1 = -\frac{3}{4}\cdot\frac{b}{a}$, $x_2 = -\frac{2}{5}\frac{b}{a}$, azaz valóban $x_1 : x_2 = 3 : 2$.

5. Legyen $AB = 3a$ és $BC = 2a$. Vegyük fel az *elemzőábrán* a P pontot az AB szakaszon belül. Legyen $BP = x$ ($x \in \mathbf{R}$), ekkor $AP = 3a - x$; $PC = 4\sqrt{5}$, $PD = 8\sqrt{2}$. A PBC, illetve a PAD derékszögű háromszögekben $x^2 + 4a^2 = 80$, illetve $(3a-x)^2+4a^2=128$. A második egyenletből kivonva az elsőt $9a^2-6ax=48$, ahonnan $x=\dfrac{3a^2-16}{2a}$. Visszahelyettesítve az első egyenletbe, majd rendezve az egyenletet

$$25a^4-416a^2+256=0.$$

Innen $a^2=16$ vagy $a^2=\dfrac{16}{25}$, azaz $a=4$ vagy $a=\dfrac{4}{5}$. A téglalap területe $6a^2$, tehát $T=96$ vagy $T=\dfrac{96}{25}$ területegység. Ha $a=4$, akkor $x=4$, a P pont valóban A és B közé esik. Ha $a=\dfrac{4}{5}$, akkor $x=-\dfrac{44}{5}$, a P pont az AB szakaszon kívül, a B-ből induló, A-t nem tartalmazó félegyenesen van és $BP=\dfrac{44}{5}$. (A BP előjeles szakasz!)

6. Ha $\alpha=90^\circ$, akkor $\cos\alpha=0$, $\beta+\gamma=90^\circ$, $\sin\gamma=\cos\beta$; ha $\beta=90^\circ$, akkor $\cos\beta=0$, $\alpha+\gamma=90^\circ$, $\sin\gamma=\cos\alpha$. Tehát ha a háromszög derékszögű, akkor valóban

$$\sin\gamma=\cos\alpha+\cos\beta.$$

Ha $\sin\gamma=\cos\alpha+\cos\beta$, akkor azonosságok alkalmazásával

$$2\sin\frac{\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}. \tag{1}$$

Mivel $\dfrac{\alpha+\beta}{2}=90^\circ-\dfrac{\gamma}{2}$, azért $\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}=\sin\dfrac{\gamma}{2}$, tehát (1)-ből következik ($\sin\dfrac{\gamma}{2}>0$), hogy

$$\cos\frac{\gamma}{2}=\cos\frac{\alpha-\beta}{2}. \tag{2}$$

A (2) pontosan akkor teljesül, ha

$$\gamma=\alpha-\beta \qquad \text{vagy} \qquad \gamma=\beta-\alpha,$$

azaz $\gamma+\beta=\alpha$ vagy $\gamma+\alpha=\beta$ tehát, $\alpha=90^\circ$ vagy $\beta=90^\circ$, tehát a háromszög derékszögű.

7. Ha $a>1$, akkor az a alapú logaritmusfüggvény szigorú monoton növekedése miatt

$$(1+\log_a x)\log_a x>2+\log_a x, \qquad \text{ahol} \quad x>0.$$

Innen

$$(\log_a x)^2>2, \qquad \text{azaz} \qquad |\log_a x|>\sqrt{2},$$
$$\log_a x>\sqrt{2} \qquad \text{vagy} \qquad \log_a x<-\sqrt{2};$$

a megoldások ebben az esetben

$$x>a^{\sqrt{2}} \qquad \text{vagy} \qquad 0<x<a^{-\sqrt{2}}.$$

Ha $0<a<1$, akkor az a alapú logaritmusfüggvény szigorú monoton csökkenése miatt

$$(\log_a x)^2<2, \qquad \text{azaz} \qquad |\log_a x|<\sqrt{2},$$
$$-\sqrt{2}<\log_a x<\sqrt{2};$$

a megoldások ebben az esetben

$$a^{\sqrt{2}}<x<a^{-\sqrt{2}}.$$

8. Alkalmazzuk az $A>0$, $B>0$ esetben fennálló

$$A+B\geq 2\sqrt{AB}$$

azonos egyenlőtlenséget, ahol az egyenlőség pontosan $A=B$ esetén teljesül. Ezek szerint

$$x^4+4y^4\geq 2\sqrt{4x^4y^4}=4x^2y^2 \qquad \text{és}$$
$$4x^2y^2+\frac{1}{x^2y^2}\geq 2\sqrt{4x^2y^2\cdot\frac{1}{x^2y^2}}=4.$$
$$x^4+4y^4+\frac{1}{x^2y^2}\geq 4x^2y^2+\frac{1}{x^2y^2}\geq 4.$$

A legkisebb helyettesítési érték tehát a 4, amit akkor vesz fel a kifejezés, ha $x^4=4y^4$ és $4x^2y^2=\dfrac{1}{x^2y^2}$. Ez pontosan akkor teljesül, ha $x=1$ és $y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ vagy $x=-1$, $y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ vagy $x=1$, $y=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ vagy $x=-1$, $y=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Megjegyzés. A megoldás a következőkből is adódik:

$$x^4+4y^4+\frac{1}{x^2y^2}=(x^2-2y^2)^2+4x^2y^2+\frac{1}{x^2y^2}\geq$$
$$\geq (x^2-2y^2)^2+2\sqrt{4x^2y^2\cdot\frac{1}{x^2y^2}}=(x^2-2y^2)^2+4\geq 4.$$

Az egyenlőség akkor teljesül, ha $x^2=2y^2$ és $4x^2y^2=\dfrac{1}{x^2y^2}$, azaz ha $y^2=\dfrac{1}{2}$ és $x^2=1$.

Rábai Imre